150 лет

УДК 517.518.87+517.518.843+514.174.5

Д. Билик, М. Т. Лэйси

Однобитовые измерения, дискрепанс и принцип Столярского

Знаколинейное однобитовое отображение d-мерной сферы $\mathbb{S}^d$ в N-мерный хэммингов (булев) куб $H^N=\{-1,+1\}^N$ задается правилом

$$x\mapsto\{\operatorname{sign}(x\cdot z_j)\colon 1\leqslant j\leqslant N\},$$

где $\{z_j\}\subset\mathbb{S}^d$. При $0<\delta<1$ мы выводим оценки на $N(d,\delta)$ – наименьшее целое число N такое, что существует знаколинейное отображение со свойством δ-ограниченной изометрии; при этом мы рассматриваем нормированную геодезическую метрику на $\mathbb{S}^d$ и расстояние Хэмминга на H^N. С точностью до полилогарифмического множителя $N(d,\delta)\approx\delta^{-2+2/(d+1)}$, здесь в показатель степени δ входит размерностная поправка. Постановка этой задачи происходит из литературы по однобитовым измерениям, а метод доказательства заимствован из геометрической теории дискрепанса. Также формулируется аналог принципа инвариантности Столярского для данной ситуации, который утверждает, что минимизация L^2-усредненной погрешности вложения эквивалентна минимизации дискретной энергии $\sum_{i,j}\bigl(\frac12-d(z_i,z_j)\bigr)^2$, где d – нормированное геодезическое расстояние.

Библиография: 39 названий.

Ключевые слова: дискрепанс, однобитовые измерения, свойство ограниченной изметрии, принцип Столярского.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8656

§ 1. Введение

В настоящей работе изучается следующий вопрос: чему равно наименьшее число таких гиперплоскостей, что геодезическое расстояние между любыми двумя точками единичной сферы хорошо аппроксимируется долей тех гиперплоскостей из этого множетства, которые разделяют данные точки. Этот вопрос имеет отношение к различным областям: к однобитовым измерениям (нелинейный вариант сжатых измерений), к геометрическому функциональному анализу (почти изометричные вложения) и к комбинаторной геометрии (разбиения сферы), в то время как наши методы доказательства заимствованы из геометрической теории дискрепанса.

Введем необходимые обозначения и уточним сформулированный вопрос.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда National Science Foundation (гранты DMS 1101519 и DMS 1265570).

Пусть $d \geqslant 2$, и пусть $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ обозначает единичную d-мерную сферу. Обозначим через $d(x, y)$ *геодезическое* расстояние между x и y на $\mathbb{S}^d$, нормированное таким образом, что расстояние между диаметрально противоположными точками равно 1, т.е.

$$d(x, y) = \frac{\cos^{-1}(x \cdot y)}{\pi}.$$

Между точками N-мерного хэммингова (булева) куба $H^N = \{-1, +1\}^N$ введем расстояние Хэмминга

$$d_H(s, t) = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} |s_j - t_j| = \frac{1}{N} \cdot \#\{1 \leqslant j \leqslant N \colon s_j \neq t_j\},$$

где $s = (s_1, \ldots, s_N) \in H^N$ и аналогично для t, т.е. $d_H(s, t)$ определяется как доля тех координат, по которым s и t различаются. Мы рассматриваем *знаколинейные* отображения из $\mathbb{S}^d$ в H^N, задаваемые соотношением

$$\varphi_Z(x) = \{\operatorname{sgn}(z_j \cdot x) \colon 1 \leqslant j \leqslant N\},$$

где $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_N\} \subset \mathbb{S}^d$. Заметим, что в наших обозначениях можно записать $\varphi_Z(x) = \operatorname{sgn}(Ax)$, где строки матрицы A составлены из векторов $z_1, \ldots, z_N$.

Каждая координата отоборажения φ_Z разбивает $\mathbb{S}^d$ на две полусферы, и расстояние Хэмминга

$$d_H(\varphi_Z(x), \varphi_Z(y))$$

равно доле тех гиперплоскостей $z_j^{\perp}$, которые *разделяют* точки x и y. Нетрудно видеть, что если гиперплоскость $z^{\perp}$ выбирается случайным образом при равномерном распределении, то

$$\mathbb{P}\bigl\{\operatorname{sgn}(x \cdot z) \neq \operatorname{sgn}(y \cdot z)\bigr\} = d(x, y). \tag{1.1}$$

Это основополагающий пример применения формулы Крофтона из интегральной геометрии (см. [36; с. 36–40]). Значит, для большого числа случайно выбранных (или тщательно подобранных детерминированным образом) гиперплоскостей расстояние Хэмминга $d_H(x, y)$ должно быть близко к геодезическому расстоянию $d(x, y)$.

В количественном отношении близость выражается при помощи следующего *свойства ограниченной изометрии* (*СОИ – restricted isometric property*, *RIP*) – основного понятия, используемого в работах по сжатым измерениям.

Определение 1. Пусть $0 < \delta < 1$. Отображение $\varphi \colon \mathbb{S}^d \mapsto H^N$ *удовлетворяет свойству* δ-СОИ, если

$$\sup_{x, y \in \mathbb{S}^d} |d_H(\varphi(x), \varphi(y)) - d(x, y)| < \delta. \tag{1.2}$$

Через $N(d, \delta)$ обозначается наименьшее целое число N такое, что существует N-точеченое множество $Z \subset \mathbb{S}^d$, для которого отображение φ_Z удовлетворяет свойству δ-СОИ.

В знаколинейном случае $\varphi = \varphi_Z$ положим

$$\Delta_Z(x, y) = d_H(\varphi_Z(x), \varphi_Z(y)) - d(x, y). \tag{1.3}$$

Обозначим через $N_{\mathrm{rdm}}(d, \delta)$ наименьшее целое число N такое, что при случайном выборе Z знаколинейное отображение φ_Z обладает свойством δ-СОИ с вероятностью не менее $1/2$. В работе [10], написанной параллельно с настоящей статьей, мы выдвигаем гипотезу, логически следующую из статьи [32], о том, что

$$N_{\mathrm{rdm}}(d, \delta) \lesssim d\delta^{-2}. \tag{1.4}$$

Такого рода оценки известны для *линейного* вложения сферы в $\mathbb{R}^N$ (теорема Дворецкого). Показатель степени δ^{-2} является точным при случайном выборе – это следует из центральной предельной теоремы. В работе [10] мы показываем, что отображение $\mathbb{S}^d$ в $\mathscr{H}^N$, обладающее свойством δ-СОИ, существует для значений N, удовлетворяющих оценке (1.4), хотя это отображение не будет знаколинейным, а скорее является композицией отображения "в ближайшего соседа" со знаколинейным отображением. Мы также доказываем там аналог соотношения (1.4) для разреженных векторов.

В настоящей работе мы показываем, что в общем случае к показателю степени δ требуется размерностная поправка. Это первый из наших основных результатов.

Теорема 1. *При всех значениях $d \in \mathbb{N}$ и $0 < \delta < 1$ имеет место соотношение*

$$N(d, \delta) \approx_{\log} \delta^{-2+\frac{2}{d+1}}, \tag{1.5}$$

где равенство выполняется с точностью до константы, зависящей от размерности, и полилогарифмического множителя, зависящего от d и δ.

Верхняя оценка в (1.5) достигается путем предъявления набора Z небольшой мощности, для которого φ_Z удовлетворяет свойству δ-СОИ. Такой пример дает *районированная* (или *стратифицированная*) *выборка* – нечто среднее между чисто случайными и детерминированными конструкциями. Грубо говоря, сначала сфера $\mathbb{S}^d$ разбивается на N примерно равных частей, а затем в каждой части случайным образом выбирается точка (подробнее см. в § 2). Нижняя граница обусловлена универсальным утверждением: для любого набора Z достаточно малой мощности рассматриваемое отображение не обладает свойством δ-СОИ. Это глубокий результат из геометрической теории дискрепанса.

В большей части ранее проведенных исследований рассматриваются множества Z, выбранные случайным образом. Л. Жак с соавторами (см. [24; теорема 2]) доказали аналог соотношения (1.4) для разреженных векторов в $\mathbb{S}^d$ с дополнительным логарифмическим по δ членом. Я. План и Р. Вершинин в работе [32] рассматривали данный вопрос, изучая свойство СОИ для отображений подмножеств общего вида $K \subset \mathbb{S}^d$ в хэммингов куб, ярким примером которых являются разреженные векторы. Они доказали (см. [32; теорема 1.2]), что $N_{\mathrm{rdm}}(d, \delta) \lesssim d\delta^{-6}$, и высказали гипотезу о справедливости соотношения (1.4) по крайней мере при случайном выборе. Ни в одной из упомянутых работ не предполагалось наличия указанной выше размерностной поправки в показателе степени δ.

Поскольку в приложениях размерность d обычно достаточно высока, мы рассматриваем неасимптотический вариант верхней границы в (1.5) и вычисляем эффективное значение константы C_d, показывая, что она растет примерно как $d^{5/2}$ (для более точной формулировки см. теорему 4):

$$N(d,\delta) \leqslant \max\biggl\{Cd^{\frac{5}{2}}\delta^{-2+\frac{2}{d+1}}\left(1+\log d+\log\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{d}{d+1}},\,100d\biggr\},$$

где $C>0$ является абсолютной константой.

Второй из наших основных результатов относится к несколько иному направлению. В теореме 5 мы показываем, что L^2-норма функции $\Delta_Z(x,y)$, определенной в (1.3), удовлетворяет аналогу принципа Столярского (см. [35]), согласно которому минимизация L^2-среднего значения $\Delta_Z(x,y)$ эквивалентна минимизации дискретной энергии вида $\frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\bigl(\frac{1}{2}-d(z_i,z_j)\bigr)^2$. Это интересным образом связано с такими объектами, как сферические коды, равноугольные прямые и фреймы. Более подробно об этом в теореме 5 и § 3.

Однобитовые измерения. Свойство ограниченной изометрии (СОИ) было введено Э. Кэндесом и Т. Тао в работе [16]; оно является основным понятием парадигмы сжатых измерений (см. [21; гл. 6]). Это свойство может изучаться в различных метрических пространствах и поэтому имеет много интересных вариантов.

Однобитовые измерения были введены П. Буфуносом и Р. Баранюком в работе [12]. Мотивацией для изучения однобитовых измерений $\operatorname{sgn}(x\cdot y)$ является то, что (a) они задают некоторую каноническую нелинейность измерений, а также каноническую дискретизацию данных, (б) в некоторых прорывных технологиях используются нелинейные наблюдения и, (в) таким образом, определенный интерес представляет разработка фундаментальной теории нелинейной обработки сигналов.

Дальнейшее развитие теория получила в работах [23], [24], [30], [32]. Для вывода верхних оценок, как правило, точки на сфере выбираются случайным образом. Отметим, что в [23; теорема 1] приводится нижняя оценка на скорость восстановления однобитового декодера. Я. План и Р. Вершинин в работе [32] получили результаты об однобитовых отображениях со свойством СОИ для произвольных подмножеств единичной сферы и выдвинули некоторые смелые гипотезы об оценках для этих отображений. В упомянутой работе [10] мы изучаем некоторые из этих свойств в ситуации, когда гиперплоскости выбираются случайным образом. Результаты, относящиеся к однобитовым измерениям, используются и в других интересных ситуациях (см. работы, указанные выше, а также [4], [31]).

Нижние оценки, такие как соотношения, доказанные в теореме 1, очерчивают границы того, что может быть достигнуто в рамках сжатых измерений. Например, в работе К. Г. Ларсена и Ж. Нельсона [22] доказывается *нижняя граница* для понижения размерности в лемме Джонсона–Линденштраусса. Эта лемма является фундаментальным результатом в теории снижения размерности. Если коротко, она утверждает, что для подмножества $X\subset\mathbb{S}^d\subset\mathbb{R}^{d+1}$ мощности k существует линейное отображение $A\colon\mathbb{R}^{d+1}\mapsto\mathbb{R}^N$, которое при ограничении на X удовлетворяет свойству δ-СОИ при условии $N\gtrsim\delta^{-2}\log k$. Имеется много доказательств этого результата (см., например, [34]). Хорошо известна связь этой леммы с парадигмой сжатых измерений (см., например, [3]).

В упомянутой выше нашей работе [10] мы показываем, что имеется *однобитовый* вариант оценки Джонсона–Линденштраусса, с такой же нижней гранью $N \gtrsim \delta^{-2}\log k$. Интересно было бы узнать, является ли и эта оценка точной. Изящные методы, использованные в работе [22], являются по своей сути линейными, поэтому здесь требуется новая техника. Продвижение в решении этого вопроса могло бы оказать влияние на нижние оценки для *нелинейных* отображений Джонсона–Линденштраусса со свойством СОИ.

Теорема Дворецкого. Результаты данной работы также затрагивают теорему Дворецкого (см. [19]), которая утверждает, что для любого $\epsilon > 0$ и для любой размерности d существует $N = N(d,\epsilon)$ такое, что любое банахово пространство X размерности N содержит подпространство Y размерности d, которое может быть вложено в гильбертово пространство с искажением не более $1+\epsilon$. (Конечное искажение должно выполняться равномерно во всех масштабах, в отличие от свойства СОИ, которое не учитывает малые масштабы.) Это фундаментальный результат из геометрического функционального анализа; у него существуют более тонкие варианты для метрических пространств (см. [2], [28]).

Любопытно, что рассуждения Я. Плана и Р. Вершинина (см. [19; § 3.2]) опираются на вариант теоремы Дворецкого и на самом деле связывают усиленные оценки из теоремы Дворецкого с уточнением отображений, удовлетворяющих свойству СОИ. С учетом связи между свойствами СОИ в геометрической теории дискрепанса, которая будет установлена в настоящей работе, возникает ряд новых методик для исследования данного вопроса.

Геометрическая интерпретация. Приведенные выше результаты можно интерпретировать как свойства замощений сферы $\mathbb{S}^d$, индуцированных гиперплоскостями $\{z^\perp : z \in Z\}$. Целое число $N(d,\delta)$ – размер наименьшего множества Z с тем свойством, что для любых $x, y \in \mathbb{S}^d$ доля тех гиперплоскостей из Z, которые разделяют x и y, ограничена сверху и снизу величиной $d(x,y)\pm\delta$. Этот геометрический язык, используемый в работе Я. Плана и Р. Вершинина [19], устанавливает связь с геометрической теорией дискрепанса.

Упомянем некоторые свежие работы, в которых исследуется интегрирование на сферах и смежные геометрические вопросы: [1], [15], [33].

В настоящей статье через σ обозначается поверхностная мера на сфере, нормированная так, что $\sigma(\mathbb{S}^d) = 1$. Ненормированная (хаусдорфова) мера на $\mathbb{S}^d$ обозначается через σ_d^*. Мы будем использовать обозначения $\omega = \sigma_{d-1}^*(\mathbb{S}^{d-1})$ и $\Omega = \sigma_d^*(\mathbb{S}^d)$. В частности,

$$\Omega = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})},$$

и отношение между этими двумя величинами, которое будет часто встречаться, удовлетворяет соотношению (см. [26])

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\sqrt{\pi}} \leqslant \sqrt{\frac{d}{2\pi}}. \tag{1.6}$$

Запись $A \lesssim B$ означает то, что $A \leqslant CB$ для некоторой фиксированной константы $C > 0$. В некоторых случаях константа может зависеть от размерности d (это будет ясно из контекста), но она никогда не зависит от N и δ.

1.1. Дискрепанс. Мы сформулируем свойство СОИ на языке геометрической теории дискрепанса на сфере $\mathbb{S}^d$. Пусть $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$ – N-точечное подмножество сферы $\mathbb{S}^d$. Дискрепансом набора Z относительно измеримого подмножества $S \subset \mathbb{S}^d$ называется величина

$$D(Z, S) = \frac{1}{N} \cdot \#\{Z \cap S\} - \sigma(S).$$

Определим экстремальный (L^∞) дискрепанс набора Z относительно семейства $\mathscr{S}$ измеримых подмножеств сферы $\mathbb{S}^d$ формулой

$$D_{\mathscr{S}}(Z) = \sup_{S \in \mathscr{S}} |D(Z, S)|. \tag{1.7}$$

Если семейство $\mathscr{S}$ допускает естественную меру, то можно также заменить в этой формуле точную верхнюю грань на L^2-среднее. Основные вопросы теории дискрепанса таковы. Насколько малым может быть дискрепанс? Какие распределения точек являются хорошими или оптимальными? Эти проблемы глубоко связаны с теорией аппроксимации, вероятностью, комбинаторикой, теорией чисел, информатикой, анализом и другими областями (см. [7], [18], [27]).

В этом смысле величина $\Delta_Z(x, y)$, определенная формулой (1.3), очевидно, имеет характер дискрепанса. На самом деле (и это, возможно, наиболее важное наблюдение в нашей статье) проблема равномерных разбиений может быть переформулирована в виде проблемы геометрического дискрепанса относительно *сферических клиньев*.

Обозначим множество нормалей тех гиперплоскостей, которые разделяют x и y, через

$$W_{xy} = \big\{ z \in \mathbb{S}^d \colon \operatorname{sgn}(x \cdot z) \neq \operatorname{sgn}(y \cdot z) \big\}. \tag{1.8}$$

Символ W указывает на *wedge* (*клин*), поскольку множество W_{xy} на самом деле выглядит как сферический клин, т.е. подмнжество точек сферы, лежащих между гиперплоскостями $x \cdot z = 0$ и $y \cdot z = 0$ (см. рис. 1).

Из формулы Крофтона (1.1) следует, что

$$\sigma(W_{xy}) = \mathbb{P}(z^\perp \text{разделяет } x \text{ и } y) = d(x, y).$$

Таким образом, величину (1.3) можно переписать в виде

$$\Delta_Z(x, y) = \frac{\#(Z \cap W_{xy})}{N} - \sigma(W_{xy}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{W_{xy}}(z_k) - \sigma(W_{xy}) =: D(Z, W_{xy}), \tag{1.9}$$

т.е. как дискрепанс N-точечного распределения Z относительно клина W_{xy} (см. п. 1.3).

Теперь свойство СОИ может быть сформулировано в терминах L^∞-дискрепанса относительно клиньев. В самом деле, согласно определениям (1.2) и (1.7)

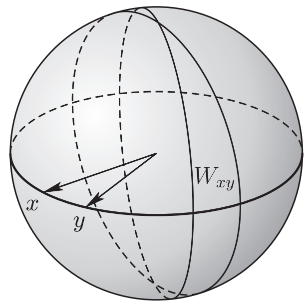

Рис. 1. Сферический клин W_{xy}

отображение φ_Z обладает свойством δ-СОИ в точности тогда, когда значение нижеуказанной величины не превосходит δ:

$$\|\Delta_Z\|_\infty = \sup_{x,y\in\mathbb{S}^d}\left|\frac{\#(Z\cap W_{xy})}{N} - \sigma(W_{xy})\right| =: D_{\mathrm{wedge}}(Z). \tag{1.10}$$

Таким образом, проблема оценки величины $N(d,\delta)$ является прямо обратной к получению оценок дискрепанса в терминах N, и это в точности тот подход, который мы будем использовать.

1.2. Отправная точка: дискрепанс для сферических сегментов. Напомним классические результаты о дискрепансе для сферических сегментов. Для точки $x \in \mathbb{S}^d$ и $t \in [-1,1]$ обозначим через $C(x,t)$ сферический сегмент высоты t с центром в точке x, задаваемый соотношением

$$C(x,t) = \{y \in \mathbb{S}^d \colon y\cdot x \geqslant t\}.$$

Обозначим множество всех сферических сегментов через $\mathscr{C}$. Для N-точечного множества $Z \subset \mathbb{S}^d$ пусть

$$D_{\mathrm{cap}}(Z) = \sup_{C\in\mathscr{C}} |D(Z,C)| = \sup_{C\in\mathscr{C}}\left|\frac{\#(Z\cap C)}{N} - \sigma(C)\right|$$

обозначает экстремальный дискрепанс набора Z относительно множества всех сферических сегментов $\mathscr{C}$. Следующие классические результаты, полученные Й. Беком в работе [5], [6], дают почти точную информацию о порядке роста этой величины с ростом N.

Теорема Бека (об уклонении сферического сегмента). *Для размерностей $d \geqslant 2$ имеют место следующие оценки.*

Верхняя оценка. Существует N-точечное множество $Z \subset \mathbb{S}^d$, для которого дискрепанс для сферических сегментов удовлетворяет соотношению

$$D_{\mathrm{cap}}(Z) \lesssim N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}}\sqrt{\log N}. \tag{1.11}$$

Нижняя оценка. Для любого N-точечного множества $Z \subset \mathbb{S}^d$ дискрепанс для сферических сегментов удовлетворяет соотношению

$$D_{\mathrm{cap}}(Z) \gtrsim N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}}. \tag{1.12}$$

Остановимся подробно на верхней оценке (1.11). Она доказывается с использованием конструкции, известной как *районированная выборка*, которая дает полуслучайное множество точек. Мы подробно опишем эту конструкцию в § 2. Доказательство соотношения (1.11) в работе [6] звучит как "…используя вероятностные идеи, несложно показать…" и отсылает читателя к работе [5], где этот факт устанавливается для повернутых прямоугольников, а не сферических сегментов. (Хорошо известно, что районированная выборка применяется во многих геометрических постановках.) В монографии [7] алгоритм описывается более детально, но один из ключевых этапов, а именно регулярное разбиение сферы на равновеликие части, просто постулируется. Не так давно эта конструкция была строго формализована и были найдены эффективные значения фигурирующих в ней констант в работах [20], [26]; см. дальнейшее обсуждение в п. 2.1.

Принято считать, что стандартные множества с малым дискрепансом, давая хорошие оценки в смысле числа точек N, при этом демонстрируют очень плохую, часто экспоненциальную, зависимость от размерности. Однако ниже мы увидим, что, судя по всему, для районированной выборки поведение константы вполне приемлемо (см. также обсуждение аналогичного эффекта в [29]). Это согласуется с тем фактом, что данная конструкция является промежуточной между чисто случайными и детерминированными множествами.

Поскольку нас интересует как асимптотический, так и неасимптотический режимы, мы будем изучать эту конструкцию (для случая сферических клиньев) весьма скрупулезно, обращая внимание на зависимость константы от размерности.

Доказательство нижней оценки (1.12) опирается на анализ Фурье; оно остается верным, если вместо супремума используется меньшая величина, L^2-среднее значение

$$D_{\mathrm{cap},L^2}(Z) = \left(\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{S}^d}\left|\frac{\#(Z\cap C(x,t))}{N} - \sigma(C(x,t))\right|^2 d\sigma(x)\,dt\right)^{1/2}.$$

Точнее, имеет место следующая нижняя оценка, более строгая, чем (1.12):

$$D_{\mathrm{cap},L^2}(Z) \gtrsim N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}}. \tag{1.13}$$

Эта оценка является точной: L^2-уклонение районированной выборки дает оценку, похожую на (1.11), но без $\sqrt{\log N}$.

Удивительным образом, минимизация L^2-дискрепанса – это то же самое, что максимизация суммы попарных расстояний между векторами в Z, что является основным результатом работы [35].

Теорема 2 (принцип инвариантности Столярского). *В любой размерности $d \geqslant 2$ для любого N-точечного множества $Z = \{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathbb{S}^d$ имеет место соотношение*

$$\frac{1}{c_d}[D_{\mathrm{cap},L^2}(Z)]^2 = \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\|x-y\|\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) - \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\|z_i - z_j\|, \tag{1.14}$$

где $\|\cdot\|$ *– евклидова норма и*

$$c_d = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^d} |p\cdot z|\, d\sigma(z) = \frac{1}{d}\,\frac{\omega}{\Omega}$$

для любого полюса $p \in \mathbb{S}^d$.

Квадрат L^2-уклонения – это в точности разность между непрерывной энергией с потенциалом, определяемой как $\|x-y\|$, и дискретной энергией, индуцированной точками набора Z. Различные доказательства принципа Столярского можно найти в работах [9], [14].

1.3. Основные результаты. Аналоги оценок Бека для уклонения (1.11) и (1.12) а также принципа инвариантности Столярского выполняются для сферических клиньев W_{xy}. Из них, в свою очередь, следуют результаты для знаколинейных отображений со свойством СОИ. Более того, мы изучим зависимость верхних оценок от размерности d. Напомним определение сферического клина W_{xy}, задаваемого соотношением (1.8), и дискрепанса для сферических клиньев (1.9), (1.10).

$$D_{\text{wedge}}(Z) = \sup_{x,y\in\mathbb{S}^d} |D(Z, W_{xy})| = \sup_{x,y\in\mathbb{S}^d}\left|\frac{\#(Z\cap W_{xy})}{N} - \sigma(W_{xy})\right|.$$

Теорема 3. *При любом значении* $d \geqslant 2$ *существуют такие* $B_d, C_d > 0$, *что для всех целых* $N \geqslant 1$ *имеют место следующие оценки.*

Верхняя оценка. Существует распределение набора из N *точек* $Z \subset \mathbb{S}^d$, *удовлетворяющее соотношению*

$$D_{\text{wedge}}(Z) \leqslant C_d N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}}\sqrt{\log N}. \tag{1.15}$$

При условии $N \geqslant 100d$ *выполняется неравенство* $C_d \leqslant 20 d^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4d}}$.

Нижняя оценка. Для любого множества $Z \subset \mathbb{S}^d$ *мощности* N *имеет место соотношение*

$$D_{\text{wedge}}(Z) \geqslant B_d N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}}. \tag{1.16}$$

Оба неравенства хорошо известны в контексте очень похожей геометрической ситуации. М. Блюмлингер в работе [11] показал, что верхняя оценка (1.15) выполняется для дискрепанса относительно сферических "двуугольников". Для $x, y \in \mathbb{S}^d$ обозначим

$$S_{xy} = \{z \in \mathbb{S}^d \colon z\cdot x > 0,\ z\cdot y < 0\}.$$

Другими словами, двуугольник S_{xy} – это половина сферического клина W_{xy}. Следует отметить, что дискрепанс относительно двуугольников является на самом деле более адекватной мерой равномерности распределения на сфере, чем дискрепанс относительно клиньев (уклонение относительно клиньев не изменяется при перемещении всех точек в полусферу $\{x\cdot p \geqslant 0\}$ путем замены некоторых точек x на $-x$). Используя районированную выборку почти таким же образом, как и Й. Бек, М. Блюмлингер показал, что существует такое множество $Z \subset \mathbb{S}^d$, $\#Z = N$, что

$$D_{\text{slice}}(Z) = \sup_{x,y\in\mathbb{S}^d} |D(Z, S_{xy})| \lesssim N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}}\sqrt{\log N}.$$

Как и оценка Бека, эта граница ничего не говорит о зависимости констант от размерности. Без учета констант отсюда сразу вытекает основная оценка (1.15) из теоремы 3, поскольку

$$D(Z, W_{xy}) = D(Z, S_{xy}) + D(Z, S_{-x,-y}),$$

и, значит,

$$D_{\text{wedge}}(Z) \leqslant 2D_{\text{slice}}(Z).$$

Эффективное значение константы C_d в теореме 3, которое играет важную роль в равномерных разбиениях и в проблемах однобитовых сжатых измерений, требует гораздо более тонких рассуждений и конструкций, которые появились только недавно, см. п. 2.1.

М. Блюмлингер также показал, что нижняя граница (1.16) выполняется для дискрепанса относительно сферических двуугольников. Доказательство использует сферические гармоники и является довольно сложным (И. Матоушек в [27] пишет, что "было бы интересно найти простое доказательство"). На самом деле было доказано, что L^2-дискрепанс для двуугольников ограничен снизу L^2-дискрепансом для сферических сегментов, откуда требуемый результат следует в силу оценки Бека (1.13):

$$D_{\text{slice}}(Z) \gtrsim D_{\text{slice},L^2}(Z) \gtrsim D_{\text{cap},L^2}(Z) \gtrsim N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}}. \tag{1.17}$$

Нижнюю оценку для сферических клиньев можно вывести при помощи следующего соображения симметризации.

Доказательство соотношения (1.16). Для фиксированного множества точек $Z = \{z_1, \ldots, z_N\} \subset \mathbb{S}^d$ рассмотрим его симметризацию, т.е. $2N$-точечное множество $Z^* = Z \cup (-Z)$. Легко видеть, что

$$D(Z, W_{xy}) = D(Z, S_{xy}) + D(Z, S_{-x,-y}) = D(Z, S_{xy}) + D(-Z, S_{xy}) = 2D(Z^*, S_{xy}).$$

Таким образом,

$$D_{\text{wedge}}(Z) \geqslant 2D_{\text{slice}}(Z^*) \gtrsim (2N)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}},$$

откуда следует (1.16).

Обращая оценки из теоремы 3, мы сразу получаем первый анонсированный нами результат (1.5), асимптотические оценки на минимальную размерность знаколинейного отображения со свойством δ-СОИ из $\mathbb{S}^d$ в хэммингов куб.

Теорема 4. *Существует абсолютная константа $C > 0$ (не зависящая от размерности) такая, что в любой размерности $d \geqslant 2$ и при любом $\delta > 0$ величина $N(d, \delta)$ из определения 1 удовлетворяет оценкам*

$$b_d \delta^{-2+\frac{2}{d+1}} \leqslant N(d, \delta) \leqslant \max\left\{100d, C d^{\alpha} \delta^{-2+\frac{2}{d+1}} \left(1 + \log d + \log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{d}{d+1}}\right\},$$

где $\alpha = \frac{5}{2} - \frac{2}{d+1}$ и $b_d > 0$.

В качестве значения этой абсолютной константы C можно взять, например, $C = 4000$. Некоторые детали приводятся в конце п. 2.3.

С другой строны мы также получаем вариант принципа инвариантности Столярского (1.14).

Теорема 5 (принцип Столярского для сферических клиньев). *Для любого конечного множества* $Z=\{z_1,\dots,z_N\}\subset\mathbb{S}^d$ *выполняется следующее соотношение*:

$$\|\Delta_Z(x,y)\|_2^2=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac12-d(z_i,z_j)\right)^2-\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\left(\frac12-d(x,y)\right)^2 d\sigma(x)\,d\sigma(y). \tag{1.18}$$

Минимизация L^2-среднего уклонения сферических клиньев, соответствующего разбиению сферы, таким образом, эквивалентна минимизации дискретной потенциальной энергии множества Z, индуцированной потенциалом $P(x,y)=\left(\frac12-d(x,y)\right)^2$. Интуитивно хотелось бы выбрать элементы множества Z "как можно более ортогональными" в среднем.

Прежде всего, таким образом мы получаем естественных кандидатов для разбиений, которые являются хорошими или оптимальными в среднем, например, сферические коды (множества $X\subset\mathbb{S}^d$ такие, что все x, $y\in X$ удовлетворяют условию $x\cdot y<\mu$ для некоторого параметра $\mu\leqslant 1$; см. [37; гл. 5] и приведенные там ссылки) или равноугольные прямые (множества $X\subset\mathbb{S}^d$ такие, что все x, $y\in X$ удовлетворяют условию $|x\cdot y|=\mu$ для некоторого фиксированного $\mu\in[0,1)$), см. [17].

Здесь также возникают связи с теорией фреймов. Дж. Бенедетто и М. Фикус в работе [8] показали, что множество $Z=\{z_1,\dots,z_N\}\subset\mathbb{S}^d$ образует нормированный жесткий фрейм (т.е. существует константа $A>0$ такая, что для любого $x\in\mathbb{R}^{d+1}$ выполняется аналог равенства Парсеваля: $A\|x\|^2=\sum_{i=1}^N|x\cdot z_i|^2$), если и только если Z минимизирует дискретную энергию, известную под названием *полный потенциал фрейма*:

$$TP(Z)=\sum_{i,j=1}^{N}|z_i\cdot z_j|^2,$$

которая выглядит совершенно аналогично дискретной энергии в правой части соотношения (1.18).

На данный момент неизвестно, допускают ли элементы, минимизирующие выражение (1.18), аналогичную геометрическую или функциональную характеризацию, или дают ли какие-либо известные распределения приемлемые значения этой энергии. Эти интересные вопросы являются предметом дальнейших исследований. Мы докажем теорему 5 в § 3.

§ 2. Районированная выборка

Районированная (*или стратифицированная*) выборка в теории уклонения и статистике представляет собой полуслучайную конструкцию, нечто среднее между чисто случайными алгоритмами Монте-Карло и полностью детерминированными точечными множествами с малым дискрепансом. Идею нетрудно выразить в нескольких словах: вначале объемлющее многообразие (куб, тор, сфера и тому подобные) подразбивается на N областей с одинаковым объемом и (почти) одинаковым диаметром, затем в каждой из этих частей, независимо от остальных, случайно выбирается точка в соответствии с равномерным распределением.

Интуитивно данная конструкция гарантирует, что получающееся множество точек очень хорошо распределено (отсутствуют скопления или большие лакуны). На удивление во многих ситуациях это распределение дает почти оптимальный дискрепанс (в то время как чисто случайные конструкции далеки от оптимальных, а детерминированные множества построить довольно трудно). Как уже говорилось, конструкция, примененная в теореме 1, является в точности районированной выборкой. Она отличается от соответствующей нижней грани только множителем $\sqrt{\log N}$, обусловленным применением неравенств больших уклонений. Если заменить L^∞-норму в уклонении на L^2-норму, то с помощью районированной выборки легко достичь точной верхней грани (без множителя $\sqrt{\log N}$). Аналогичные явления наблюдаются в других ситуациях (дискрепанс относительно шаров или повернутых прямоугольников в единичном кубе, двуугольников на сфере и прочее).

Районированная выборка очень хорошо описана в классической литературе по теории дискрепанса, например, в работах [7], [18], [27]. Однако, поскольку в сферическом случае возникают определенные тонкости и, кроме того, нам хотелось бы проследить зависимость констант от размерности, мы опишем эту конструкцию во всех деталях. Помимо этого, из данной процедуры также вытекает количественная оценка на константу в классической границе для дискрепанса относительно сферических сегментов (1.11).

Чтобы описание конструкции было строже, введем два понятия: *разбиения на равновеликие части с ограниченным диаметром* и *аппроксимирующие семейства*.

2.1. Регулярные разбиения сферы. Пусть $S_i \subset \mathbb{S}^d$, $i = 1, 2, \dots, N$. Скажем, что $\{S_i\}_{i=1}^N$ является разбиением сферы, если $\mathbb{S}^d$ является дизъюнктным (с точностью до меры нуль) объединением этих множеств, т.е. $\mathbb{S}^d = \bigcup_{i=1}^N S_i$ и $\sigma(S_i \cap S_j) = 0$ при $i \neq j$.

Определение 2. Пусть $\mathscr{S} = \{S_i\}_{i=1}^N$ – разбиение сферы $\mathbb{S}^d$. Скажем, что это *разбиение на равновеликие части*, если $\sigma(S_i) = \frac{1}{N}$ для всех $i = 1, \dots, N$.

Определение 3. Пусть $\mathscr{S} = \{S_i\}_{i=1}^N$ – разбиение сферы $\mathbb{S}^d$ на равновеликие части. Назовем его *регулярным разбиением* (или разбиением на равновеликие части с ограниченными диаметрами) с константой $K_d > 0$, если для всех $i = 1, \dots, N$ выполнено неравенство

$$\operatorname{diam}(S_i) \leqslant K_d N^{-\frac{1}{d}}.$$

В случае единичного куба $[0,1)^d$ регулярные разбиения строятся очень легко. В самом деле, при $N = M^d$ можно просто взять непересекающиеся квадраты, длины сторон которых равны $M^{-1} = N^{-1/d}$. Для сферы $\mathbb{S}^d$ ситуация несколько сложнее. Тем не менее имеется явная верхняя оценка определенной выше константы K_d.

Теорема 6 (П. Леопарди; см. [26]). *Для любого $N \in \mathbb{N}$ существуют регулярные разбиения $\{S_i\}_{i=1}^N$ сферы $\mathbb{S}^d$ с константой K_d, задаваемой соотношением*

$$K_d = 8\left(\frac{\Omega d}{\omega}\right)^{\frac{1}{d}}, \tag{2.1}$$

где, как и раньше, Ω обозначает меру Лебега поверхности сферы $\mathbb{S}^d$ (в размерности d), а ω – мера сферы $\mathbb{S}^{d-1}$ (в размерности $(d-1)$).

Конечно, П. Леопарди формулирует результат без указания конкретного значения константы K_d. Однако его нетрудно вывести из доказательства (см. [26; с. 9]).

Интересна история этого вопроса (как она описывается в [25]): К. Столярский в работе [35] постулировал существование регулярных разбиений сферы $\mathbb{S}^d$ при всех $d \geqslant 2$, но не представил ни способа их построения, ни доказательства этого факта. Позднее, Й. Бек и В. В. Чен в работе [7] ссылались на К. Столярского, а Ж. Бургейн и И. Линденштраусс в работе [13] ссылались на Й. Бека и В. В. Чена. Полное построение регулярного разбиения сферы в произвольной размерности было представлено У. Фейге и Г. Шехтманом в работе [20], а Леопарди в [26] получил эффективное значение константы в их конструкции, которое мы и привели выше.

2.2. Аппроксимирующие семейства. Мы будем аппроксимировать бесконечное семейство множеств (например, все сферические сегменты или клинья) конечными семействами. Это позволит облегчить использование оценки границы объединения в следующем пункте.

Определение 4. Пусть $\mathscr{S}$ и $\mathscr{Q}$ – два набора подмножеств сферы $\mathbb{S}^d$. Будем говорить, что $\mathscr{Q}$ является *ε-аппроксимирующим семейством* (или ε-заключающим) для $\mathscr{S}$, если для любого $S \in \mathscr{S}$ существуют множества A, $B \in \mathscr{Q}$ такие, что

$$A \subset S \subset B, \qquad \sigma(B \setminus A) < \varepsilon.$$

Нетрудно видеть, что для любого N-точечного множества Z в $\mathbb{S}^d$ если S, A, B удовлетворяют вышеприведенному определению, то уклонения Z относительно этих множеств удовлетворяют неравенствам

$$|D(Z,S)| \leqslant \max\{|D(Z,A)|, |D(Z,B)|\} + \varepsilon. \tag{2.2}$$

Значит, $D_{\mathscr{S}}(Z) \leqslant D_{\mathscr{Q}}(Z) + \varepsilon$. Таким образом, при $\varepsilon \leqslant N^{-1}$ уклонение относительно исходного семейства имеет тот же порядок, что и уклонение относительно ε-аппроксимирующего семейства.

В некоторых случаях конструкции конечных аппроксимирующих семейств достаточно очевидны, например, параллелепипеды с ребрами, параллельными осям единичного куба, или сферические сегменты: нужно просто взять одни и те же множества с рациональными параметрами, имеющими небольшие знаменатели.

Для сферических клиньев, которые сейчас представляют для нас интерес, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого* $0 < \varepsilon < 1$ *и любого целого* $d \geqslant 1$ *существует аппроксимирующее семейство* $\mathscr{Q}$ *для набора сферических клиньев* $\{W_{xy}\colon x, y \in \mathbb{S}^d\}$ *такое, что*

$$\#\mathscr{Q} \leqslant (Cd)^{d+1}\varepsilon^{-2(d+1)}, \tag{2.3}$$

где $0 < C \leqslant 82$ *является абсолютной константой.*

Доказательство. Мы построим два отдельных семейства: одно для внутренней и одно для внешней аппроксимации сферических клиньев. Пусть $\mathscr{N}(\varepsilon)$ обозначает число покрытия сферы $\mathbb{S}^d$ в евклидовой метрике, другими словами, мощность наименьшего множества $\mathscr{H}_\varepsilon$ с тем свойством, что для любого $x \in \mathbb{S}^d$ найдется $z \in \mathscr{H}_\varepsilon$ такое, что $\|x - z\| \leqslant \varepsilon$.

Из соображений объема (см., например, [39]) легко выводится оценка

$$\mathscr{N}(\varepsilon) \leqslant \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^{d+1} \leqslant \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{d+1}.$$

(Более точные оценки можно получить, в частности, рассматривая d-мерный, а не $(d+1)$-мерный объем, но приведенного неравенства для наших целей вполне достаточно).

Мы построим ε-аппроксимирующее семейство следующим образом. Начнем с γ-сети $\mathscr{H}_\gamma$ размера $\mathscr{N}(\gamma)$, где выбор $\gamma > 0$ уточняется ниже. Для x, $y \in \mathbb{S}^d$ определим внешнее расширение и внутреннее сужение множества W_{xy} следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{xy}^{\mathrm{ext}}(\gamma) &= \{p \in \mathbb{S}^d\colon p\cdot x \geqslant -\gamma, p\cdot y \leqslant \gamma\} \cup \{p \in \mathbb{S}^d\colon p\cdot x \leqslant \gamma, p\cdot y \geqslant -\gamma\} \supset W_{xy}, \\ W_{xy}^{\mathrm{int}}(\gamma) &= \{p \in \mathbb{S}^d\colon p\cdot x \geqslant \gamma, p\cdot y \leqslant -\gamma\} \cup \{p \in \mathbb{S}^d\colon p\cdot x \leqslant -\gamma, p\cdot y \geqslant \gamma\} \subset W_{xy}. \end{aligned}$$

Утверждается, что набор

$$\mathscr{Q} = \{W_{xy}^{\mathrm{int}}(\gamma)\colon x, y \in \mathscr{H}_\gamma\} \cup \{W_{xy}^{\mathrm{ext}}(\gamma)\colon x, y \in \mathscr{H}_\gamma\}$$

образует аппроксимирующее семейство для множества всех клиньев $\{W_{xy}\colon x, y \in \mathbb{S}^d\}$. В самом деле, пусть $x', y' \in \mathbb{S}^d$. Выберем $x, y \in \mathscr{H}_\gamma$ так, чтобы $\|x - x'\| < \gamma$, $\|y - y'\| \leqslant \gamma$. Тогда нетрудно видеть, что $W_{xy}^{\mathrm{int}} \subset W_{x'y'} \subset W_{xy}^{\mathrm{ext}}$. В самом деле, например, если $p\cdot x' \geqslant 0$, то $p\cdot x = p\cdot x' - p\cdot(x' - x) \geqslant -\gamma$, оставшиеся случаи аналогичны.

Более того, легко видеть, что нормированная мера "тропического пояса" вокруг экватора удовлетворяет неравенству

$$\sigma\bigl(\{p \in \mathbb{S}^d\colon |p\cdot x| \leqslant \gamma\}\bigr) \leqslant \frac{2\gamma\omega}{\Omega}.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\sigma\bigl(W_{xy}^{\mathrm{ext}}(\gamma) \setminus W_{xy}^{\mathrm{int}}(\gamma)\bigr) \leqslant \frac{4\omega\gamma}{\Omega},$$

и, следовательно, мы получаем ε-аппроксимирующее семейство с $\varepsilon = 4\omega\gamma/\Omega$, т.е. $\gamma = \Omega\varepsilon/(4\omega)$.

Мощность этого семейства удовлетворяет оценке

$$\#\mathscr{Q} = 2(\mathscr{N}(\gamma))^2 \leqslant 2\left(\frac{4}{\gamma}\right)^{2(d+1)} = 2^{8d+9}\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2(d+1)} \cdot \varepsilon^{-2(d+1)} \leqslant (Cd)^{d+1}\varepsilon^{-2(d+1)},$$

где $C > 0$ является абсолютной константой, которую можно взять равной, например, $C = 82$. Здесь мы использовали стандартное соотношение (1.6).

Лемма 1 доказана.

2.3. Дискрепанс относительно сферических клиньев для районированной выборки. Доказательство теоремы 3. Мы будем использовать обобщенное описание алгоритма для случая сферических клиньев; оно также применимо ко многим другим ситуациям. Нам понадобится следующий вариант классической оценки Чернова–Хёфдинга для больших отклонений (см., например, [18], [27]).

Лемма 2. *Пусть $p_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим центрированные независимые случайные величины X_i, $i = 1, \dots, m$, такие, что*

$$\mathbb{P}(X_i = -p_i) = 1 - p_i \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(X_i = 1 - p_i) = p_i.$$

Пусть $X = \sum_{i=1}^m X_i$. Тогда для любого $\lambda > 0$ справедливо

$$\mathbb{P}(|X| > \lambda) < 2\exp\left(-\frac{2\lambda^2}{m}\right). \tag{2.4}$$

Начнем с регулярного разбиения $\{S_i\}_{i=1}^N$ сферы, описанного в п. 2.1, т.е. $\mathbb{S}^d = \bigcup_{i=1}^N S_i$, $\sigma(S_i \cap S_j) = 0$ при $i \neq j$, $\sigma(S_i) = 1/N$, и $\operatorname{diam}(S_i) \leqslant K_d N^{-1/d}$ для всех $i = 1, \dots, N$.

Теперь построим множество $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$, выбирая независимые случайные точки $z_i \in S_i$ в соответствии с равномерным распределением на S_i, т.е. с $N \cdot \sigma|_{S_i}$.

Пусть $\mathscr{Q}$ является $1/N$-аппроксимирующим семейством для данного семейства $\mathscr{R}$, в нашем случае семейства сферических клиньев $\{W_{xy} \colon x, y \in \mathbb{S}^d\}$. Мощность этого семейства, как было указано в п. 2.2, удовлетворяет оценке $\#\mathscr{Q} \leqslant A_d N^{\alpha_d}$. Согласно (2.3) можно взять $A_d = (Cd)^{d+1}$ и $\alpha_d = 2(d+1)$.

Рассмотрим одно множество $Q \in \mathscr{Q}$. Легко видеть, что для тех $i = 1, \dots, N$, для которых $S_i \cap \partial Q = \varnothing$ (S_i лежит либо целиком внутри, либо целиком вне Q), вклад z_i и S_i в уклонение Z относительно Q равен нулю. Другими словами,

$$D(Z, Q) = \frac{1}{N}\sum_{i\colon S_i \cap \partial Q \neq \varnothing} \bigl(\mathbf{1}_Q(z_i) - N\sigma(S_i \cap Q)\bigr) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^m X_i. \tag{2.5}$$

Здесь X_i в точности такие, как в лемме 2 с $p_i = N \cdot \sigma(S_i \cap Q)$, и $m \leqslant M$, где M – максимальное число множеств S_i, которые могут пересекать границу произвольного элемента семейства $\mathscr{Q}$.

Теперь не представляет труда оценить M для сферических клиньев. Пусть $\varepsilon = K_d N^{-\frac{1}{d}}$. Поскольку диаметр каждого множества S_i не превосходит ε, все множества S_i, которые пересекают ∂Q, содержатся в множестве $\partial Q + \varepsilon B$, где

B – единичный шар. Напомним, что σ_d^* обозначает ненормированную меру Лебега на сфере и что мы определили $\Omega = \sigma_d^*(\mathbb{S}^d)$ и $\omega = \sigma_{d-1}^*(\mathbb{S}^{d-1})$. Тогда

$$M \cdot \frac{\Omega}{N} \leqslant \sigma_d^*(\partial Q + \varepsilon B) \leqslant \sigma_{d-1}^*(\partial Q) \cdot 2\varepsilon \leqslant 8K_d N^{-\frac{1}{d}} \omega.$$

Теперь с учетом оценок на диаметр для регулярного разбиения (2.1) получаем

$$M \leqslant \frac{8K_d\omega}{\Omega} \cdot N^{1-\frac{1}{d}} \leqslant 64 d^{\frac{1}{d}} \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{1-\frac{1}{d}} N^{1-\frac{1}{d}}.$$

Выбирая параметр $\lambda = (\alpha_d \cdot M)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\log N}$, а затем используя представление (2.5) и оценку для больших уклонений (2.4), приходим к выводу, что для любого заданного $Q \in \mathscr{Q}$ имеет место соотношение

$$\mathbb{P}\left(|D(Z,Q)| > \frac{\lambda}{N}\right) = \mathbb{P}(|X| > \lambda) \leqslant 2N^{-2\alpha_d}.$$

Поскольку $\#Q_d \leqslant A_d N^{\alpha_d}$, получаем, что

$$\mathbb{P}(|D(Z,Q)| > \frac{\lambda}{N} \quad \text{хотя бы для одного} \quad Q \in \mathscr{Q}) \leqslant 2A_d N^{-\alpha_d} < 1,$$

при условии $N > (2A_d)^{1/\alpha_d}$. Следовательно, при таких N существует Z, для которого

$$\sup_{Q\in\mathscr{Q}} |D(Z,Q)| \leqslant N^{-1}(\alpha_d M)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\log N} \leqslant 8\sqrt{\alpha_d} d^{\frac{1}{2d}} \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}} N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}} \sqrt{\log N},$$

т.е. оценка дискрепанса вида (1.15) выполняется для каждого элемента аппроксимирующего семейства $Q \in \mathscr{Q}$ с константой $8\sqrt{\alpha_d}\, d^{\frac{1}{2d}} (\omega/\Omega)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}}$ при $N > (2A_d)^{1/\alpha_d}$. Поскольку эта константа больше единицы, правая часть этого соотношения превосходит $1/N$ при всех значениях N. Таким образом, согласно (2.2) оценка дискрепанса (1.15) выполняется для всех множеств W_{xy}, x, $y \in \mathbb{S}^d$, с удвоенной константой.

Вспоминая, что $\alpha_d = 2(d+1)$ и $A_d = (Cd)^{d+1}$, а также пользуясь тем фактом, что $\omega/\Omega \leqslant \sqrt{d/(2\pi)}$, получаем, что значение константы не превосходит $C_d = 20 d^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4d}}$, как только $N \geqslant 100d$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Несложная, но кропотливая проверка показывает, что если $N \geqslant 100d$ и

$$N > 400 d^{\gamma} \delta^{-\frac{2d}{d+1}} \left((d+1)\log(400d^{\gamma}) + 2d \log\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{d}{d+1}},$$

где $\gamma = \frac{3}{2} - \frac{1}{d+1}$, то $20 d^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4d}} N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2d}} \sqrt{\log N} < \delta$. Таким образом, с положительной вероятностью районированная выборка с N точками дает δ-равномерное разбиение. Нетрудно видеть, что правая часть этого соотношения ограничена величиной

$$4000 d^{\alpha} \delta^{-2+\frac{2}{d+1}} \left(1 + \log d + \log\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{d}{d+1}},$$

где $\alpha = \frac{5}{2} - \frac{2}{d+1}$. Теорема 4 доказана.

§ 3. Принцип Столярского для дискрепанса относительно клиньев

Теперь обратимся к доказательству принципа Столярского для разбиений, теоремы 5. Напомним, что L^2-норма функции $\Delta_Z(x,y)$ для множества $Z \subset \mathbb{S}^d$ имеет вид

$$\|\Delta_Z(x,y)\|_2^2 = \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\biggl(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{W_{xy}}(z_k) - \sigma(W_{xy})\biggr)^2 d\sigma(x)\,d\sigma(y). \tag{3.1}$$

Доказательство вполне элементарно по своей сути и сводится к стандартной процедуре, применимой ко многим схожим задачам: мы раскрываем в этом выражении скобки и произведения первых и вторых членов дают дискретную потенциальную энергию взаимодействия точек множества Z. В целом идея довольно плодотворная. С. Торквато в работе [38] применяет этот подход (как теоретически, так и численно) ко многим задачам по дискретной геометрической оптимизации, как например: упаковки, покрытия, оценки дисперсии, – и переформулирует их в виде задач минимизации энергии.

Доказательство теоремы 5. Напомним, что $\sigma(W_{xy}) = d(x,y)$, и заметим, что можно написать (с точностью до множеств меры нуль)

$$\mathbf{1}_{W_{xy}}(z_k) = \mathbf{1}_{\{\operatorname{sgn}(x\cdot z_k)\neq\operatorname{sgn}(y\cdot z_k)\}}(z_k) = \frac{1}{2}\bigl(1 - \operatorname{sgn}(x\cdot z_k)\cdot\operatorname{sgn}(y\cdot z_k)\bigr).$$

Таким образом, с учетом (3.1) мы имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\Delta_Z(x,y)^2\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)\\
&= \frac{1}{4N^2}\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\sum_{i,j=1}^{N}\bigl(1-\operatorname{sgn}(x\cdot z_i)\operatorname{sgn}(y\cdot z_i)\bigr)\bigl(1-\operatorname{sgn}(x\cdot z_j)\operatorname{sgn}(y\cdot z_j)\bigr)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)\\
&\qquad - \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\mathbf{1}_{W_{xy}}(z_k)\cdot d(x,y)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)\\
&\qquad + \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} d(x,y)^2\,d\sigma(x)\,d\sigma(y).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Наибольший интерес представляет первый член правой части равенства (3.2). Используя тот очевидный факт, что интеграл

$$\int_{\mathbb{S}^d}\operatorname{sgn}(p\cdot x)\,d\sigma(x) = 0 \quad \forall\, p\in\mathbb{S}^d,$$

мы приводим этот член к виду

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\biggl(\int_{\mathbb{S}^d}\operatorname{sgn}(x\cdot z_i)\operatorname{sgn}(x\cdot z_j)\,d\sigma(x)\biggr)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\biggl(\frac{1}{2} - d(z_i,z_j)\biggr)^2,$$

где последнее выражение получено следующим образом: подынтегральное выражение переписывается в виде $\operatorname{sgn}(x\cdot z_i)\operatorname{sgn}(x\cdot z_j) = 1 - 2\cdot\mathbf{1}_{W_{z_i z_j}}(x)$, и, таким образом,

$$\int_{\mathbb{S}^d}\operatorname{sgn}(x\cdot z_i)\operatorname{sgn}(x\cdot z_j)\,d\sigma(x) = 1 - 2\int_{\mathbb{S}^d}\mathbf{1}_{W_{z_i z_j}}(x)\,d\sigma(x) = 1 - 2d(z_i,z_j).$$

Мы увидим, что во втором члене (3.2) можно легко заменить дискретное среднее значение по всем $z_k \in Z$ на непрерывное среднее значение по всем $p \in \mathbb{S}^d$, с которым намного удобнее работать. В самом деле, заметим, что в силу инвариантности относительно поворотов подынтегральное выражение в (3.2) не зависит от конкретного выбора $z_k \in \mathbb{S}^d$. Следовательно, для любого полюса $p \in \mathbb{S}^d$ можно написать

$$\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\mathbf{1}_{W_{xy}}(z_k)\cdot d(x,y)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) = 2\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\mathbf{1}_{W_{xy}}(p)\cdot d(x,y)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y).$$

Вновь используя поворотную симметрию, мы замечаем, что этот интеграл можно заменить на среднее значение по всем $p \in \mathbb{S}^d$:

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} & \mathbf{1}_{W_{xy}}(p)\cdot d(x,y)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \\ &= 2\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\mathbf{1}_{W_{xy}}(p)\cdot d(x,y)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)\,d\sigma(p) \\ &= 2\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\left[\int_{\mathbb{S}^d}\mathbf{1}_{W_{xy}}(p)\,d\sigma(p)\right]\cdot d(x,y)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \\ &= 2\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} d(x,y)^2\,d\sigma(x)\,d\sigma(y), \end{aligned}$$

и, таким образом, этот член имеет тот же вид, что и последний член (3.2). Сопоставляя все, получаем

$$\|\Delta_Z(x,y)\|_2^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}-d(z_i,z_j)\right)^2 + \frac{1}{4} - \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} d(x,y)^2\,d\sigma(x)\,d\sigma(y).$$

Заметив, что $\int_{\mathbb{S}^d} d(x,y)\,d\sigma(x) = \frac{1}{2}$ и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\left(\frac{1}{2}-d(x,y)\right)^2 d\sigma(x)\,d\sigma(y) = \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} d(x,y)^2\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) - \frac{1}{4},$$

приходим к доказываемому соотношению (1.18):

$$\|\Delta_Z(x,y)\|_2^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}-d(z_i,z_j)\right)^2 - \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\left(\frac{1}{2}-d(x,y)\right)^2 d\sigma(x)\,d\sigma(y). \quad (3.3)$$

3.1. L^2-дискрепанс для случайных разбиений. Принцип Столярского дает очень простой способ вычислить математическое ожидание квадрата L^2-дискрепанса. Предположим, что множество $Z = \{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathbb{S}^d$ выбрано случайным образом и вычислим математическое ожидание $\|\Delta_Z(x,y)\|_2^2$. Очевидно, для типичного множества точек Z и типичного клина W_{xy} дискрепанс имеет порядок $1/\sqrt{N}$ и, таким образом, это математическое ожидание естественно оценивается как $\mathscr{O}(1/N)$. Для того чтобы точно вычислить его значение, нам понадобится величина, которая уже возникала в проведенных выше вычислениях, а именно второй момент геодезического расстояния, т.е.

математическое ожидание квадрата геодезического расстояния между двумя случайными точками на сфере:

$$V_d = \mathbb{E}_{xy} d(x,y)^2 = \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} d(x,y)^2 \, d\sigma(x) \, d\sigma(y).$$

Лемма 3. *Пусть множество $Z = \{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathbb{S}^d$ состоит из N независимых и одинаково (равномерно) распределенных точек на сфере. Тогда*

$$\mathbb{E}_Z \|\Delta_Z(x,y)\|_2^2 = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2} - V_d\right).$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathbb{E}_{xy} d(x,y) = 1/2$ и, следовательно, $\mathbb{E}_{xy}(1/2 - d(x,y))^2 = V_d - 1/4$. Используя принцип Столярского в финальном виде (3.3), находим значение $\mathbb{E}_Z \|\Delta_Z(x,y)\|_2^2$. Отделяя недиагональные члены от диагональных в дискретной части (3.3), получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Z \|\Delta_Z(x,y)\|_2^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \mathbb{E}_{z_i,z_j}\left(\frac{1}{2} - d(z_i,z_j)\right)^2 - \left(V_d - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{N^2}(N^2 - N)\left(V_d - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{N^2} N \frac{1}{4} - \left(V_d - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2} - V_d\right),\end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы.

В случае дискрепанса относительно сферических сегментов эти вычисления становятся еще проще:

Лемма 4. *Пусть множество $Z = \{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathbb{S}^d$ состоит из N независимых одинаково (равномерно) распределенных точек на сфере. Тогда*

$$\mathbb{E}_Z D^2_{\mathrm{cap},L^2} = \frac{c_d U_d}{N}, \tag{3.4}$$

где $U_d = \mathbb{E}_{x,y \in \mathbb{S}^d} \|x - y\|$ и c_d является константой из теоремы 2.

В самом деле, применяя исходный принцип Столярского (см. теорему 2), получаем

$$\frac{1}{c_d} \mathbb{E}_Z D^2_{\mathrm{cap},L^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \mathbb{E}_{z_i,z_j} \|z_i - z_j\| - U_d = \frac{N^2 - N}{N^2} U_d - U_d = \frac{U_d}{N}.$$

Наконец, рассмотрим более внимательно математическое ожидание квадрата геодезического расстояния V_d. Отметим, что его можно представить в виде

$$V_d = \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} d(x,y)^2 \, d\sigma(x) \, d\sigma(y) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega}{\Omega} \int_0^{\pi} \phi^2 (\sin\phi)^{d-1} d\phi, \tag{3.5}$$

где ω – площадь поверхности сферы $\mathbb{S}^{d-1}$. В таблице 1 приведены значения величины V_d для небольших размерностей.

Таблица 1. Значения величины V_d

d	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$	$d=6$
V_d	$\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi^2}$	$\frac{1}{2}-\frac{20}{9\pi^2}$	$\frac{1}{3}-\frac{5}{8\pi^2}$	$\frac{1}{2}-\frac{518}{225\pi^2}$

3.2. L^2-дискрепанс относительно клиньев для районированной выборки. Принцип Столярского (3.3) позволяет легко доказать, что районированная выборка дает оптимальный порядок L^2-дискрепанса относительно клиньев.

Лемма 5. *Пусть $Z=\{z_1,\dots,z_N\}\subset\mathbb{S}^d$, $N\in\mathbb{N}$, – множество точек, построенное при помощи районированной выборки, соответствующей регулярному разбиению сферы с константой K_d. Тогда*

$$\mathbb{E}_Z\|\Delta_Z(x,y)\|_2^2\leqslant K_dN^{-1-\frac{1}{d}}.$$

Подходящая нижняя оценка для произвольных N-точечных множеств, известная для сферических сегментов и двуугольников, может быть легко обобщена на клинья (см. оценку (1.17) и обсуждение сразу после нее).

Доказательство леммы 5. Заметим, что при $i\neq j$ имеет место соотношение

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}-d(z_i,z_j)\right)^2=N^2\int_{S_i}\int_{S_j}\left(\frac{1}{2}-d(x,y)\right)^2d\sigma(x)\,d\sigma(y),$$

в то время как при $i=j$ получается просто $\frac{1}{4}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Z\|\Delta_Z(x,y)\|_2^2\\
&\quad=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^N\mathbb{E}_{z_i,z_j}\left(\frac{1}{2}-d(z_i,z_j)\right)^2-\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d}\left(\frac{1}{2}-d(x,y)\right)^2d\sigma(x)\,d\sigma(y)\\
&\quad=\sum_{i=1}^N\int_{S_i}\int_{S_i}\big(d(x,y)-d^2(x,y)\big)d\sigma(x)\,d\sigma(y)\\
&\quad\leqslant\sum_{i=1}^N K_dN^{-\frac{1}{d}}\cdot\frac{1}{N^2}=K_dN^{-1-\frac{1}{d}},
\end{aligned}$$

поскольку $d(x,y)-d^2(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant\|x-y\|\leqslant K_dN^{-\frac{1}{d}}$ для $x,y\in S_i$.

Список литературы

[1] C. Aistleitner, J. S. Brauchart, J. Dick, "Point sets on the sphere $\mathbb{S}^2$ with small spherical cap discrepancy", *Discrete Comput. Geom.*, **48**:4 (2012), 990–1024.

[2] K. Ball, "The Ribe programme", *Séminaire Bourbaki*, v. 2011/2012, Exposés 1043–1058, Astérisque, **352**, Soc. Math. France, Paris, 2013, viii, 147–159, Exp. No. 1047.

[3] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, M. Wakin, “A simple proof of the restricted isometry property for random matrices”, *Constr. Approx.*, **28**:3 (2008), 253–263.

[4] R. Baraniuk, S. Foucart, D. Needell, Y. Plan, M. Wootters, *Exponential decay of reconstruction error from binary measurements of sparse signals*, arXiv: 1407.8246.

[5] J. Beck, “Some upper bounds in the theory of irregularities of distribution”, *Acta Arith.*, **43**:2 (1984), 115–130.

[6] J. Beck, “Sums of distances between points on a sphere – an application of the theory of irregularities of distribution to discrete geometry”, *Mathematika*, **31**:1 (1984), 33–41.

[7] J. Beck, W. W. L. Chen, *Irregularities of distribution*, Cambridge Tracts in Math., **89**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, xiv+294 pp.

[8] J. J. Benedetto, M. Fickus, “Finite normalized tight frames”, *Adv. Comput. Math.*, **18**:2-4 (2003), 357–385.

[9] D. Bilyk, F. Dai, R. Matzke, *Stolarsky principle and energy optimization on the sphere*, arXiv: 1611.04420.

[10] D. Bilyk, M. T. Lacey, *Random tessellations*, *restricted isometric embeddings*, *and one bit sensing*, arXiv: 1512.06697.

[11] M. Blümlinger, “Slice discrepancy and irregularities of distribution on spheres”, *Mathematika*, **38**:1 (1991), 105–116.

[12] P. Boufounos, R. Baraniuk, “1-bit compressive sensing”, 2008 42*nd annual conference on information sciences and systems CISS*, IEEE, Princeton, NJ, 2008, 16–21.

[13] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, “Distribution of points on spheres and approximation by zonotopes”, *Israel J. Math.*, **64**:1 (1988), 25–31.

[14] J. S. Brauchart, J. Dick, “A simple proof of Stolarsky’s invariance principle”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141**:6 (2013), 2085–2096.

[15] J. S. Brauchart, J. Dick, E. B. Saff, I. H. Sloan, Y. G. Wang, R. S. Womersley, “Covering of spheres by spherical caps and worst-case error for equal weight cubature in Sobolev spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **431**:2 (2015), 782–811.

[16] E. J. Candes, T. Tao, “Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies?”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **52**:12 (2006), 5406–5425.

[17] P. G. Casazza, D. Redmond, J. C. Tremain, “Real equiangular frames”, 2008 42*nd annual conference on information sciences and systems*, IEEE, Princeton, NJ, 2008, 715–720.

[18] B. Chazelle, *The discrepancy method. Randomness and complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, xviii+463 pp.

[19] A. Dvoretzky, “Some results on convex bodies and Banach spaces”, *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces* (Jerusalem, 1960), Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford, 1961, 123–160.

[20] U. Feige, G. Schechtman, “On the optimality of the random hyperplane rounding technique for MAX CUT”, *Random Structures Algorithms*, **20**:3 (2002), 403–440.

[21] S. Foucart, H. Rauhut, *A mathematical introduction to compressive sensing*, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser/Springer, New York, 2013, xviii+625 pp.

[22] K. G. Larsen, J. Nelson, “The Johnson–Lindenstrauss lemma is optimal for linear dimensionality reduction”, 43*rd international colloquium on automata*, *languages*, *and programming* (*ICALP* 2016) (Rome, 2016), LIPIcs, **55**, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, 2016, 11 pp.

[23] L. Jacques, K. Degraux, C. De Vleeschouwer, “Quantized iterative hard thresholding: bridging 1-bit and high-resolution quantized compressed sensing”, 10*th international conference on sampling theory and applications* (*SampTA* 2013), 2013, 105–108; arXiv: 1305.1786.

[24] L. Jacques, J. N. Laska, P. T. Boufounos, R. G. Baraniuk, "Robust 1-bit compressive sensing via binary stable embeddings of sparse vectors", *IEEE Trans. Inform. Theory*, **59**:4 (2013), 2082–2102.

[25] P. Leopardi, "A partition of the unit sphere into regions of equal area and small diameter", *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **25** (2006), 309–327.

[26] P. Leopardi, "Diameter bounds for equal area partitions of the unit sphere", *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **35** (2009), 1–16.

[27] J. Matoušek, *Geometric discrepancy. An illustrated guide*, Algorithms Combin., **18**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, xii+288 pp.

[28] A. Naor, "An introduction to the Ribe program", *Jpn. J. Math.*, **7**:2 (2012), 167–233.

[29] F. Pausinger, S. Steinerberger, "On the discrepancy of jittered sampling", *J. Complexity*, **33** (2016), 199–216; arXiv: 1510.00251.

[30] Y. Plan, R. Vershynin, "One-bit compressed sensing by linear programming", *Comm. Pure Appl. Math.*, **66**:8 (2013), 1275–1297.

[31] Y. Plan, R. Vershynin, "Robust 1-bit compressed sensing and sparse logistic regression: a convex programming approach", *IEEE Trans. Inform. Theory*, **59**:1 (2013), 482–494.

[32] Y. Plan, R. Vershynin, "Dimension reduction by random hyperplane tessellations", *Discrete Comput. Geom.*, **51**:2 (2014), 438–461.

[33] A. Reznikov, E. B. Saff, "The covering radius of randomly distributed points on a manifold", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2016**:19 (2016), 6065–6094; arXiv: 1504.03029.

[34] G. Schechtman, "Two observations regarding embedding subsets of Euclidean spaces in normed spaces", *Adv. Math.*, **200**:1 (2006), 125–135.

[35] K. B. Stolarsky, "Sums of distances between points on a sphere. II", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41**:2 (1973), 575–582.

[36] S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, Stud. Math. Libr., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005, xii+176 pp.

[37] V. Temlyakov, *Greedy approximation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., **20**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, xiv+418 pp.

[38] S. Torquato, "Reformulation of the covering and quantizer problems as ground states of interacting particles", *Phys. Rev. E* (3), **82**:5 (2010), 056109, 52 pp.; arXiv: 1009.1443.

[39] R. Vershynin, "Introduction to the non-asymptotic analysis of random matrices", *Compressed sensing*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, 210–268.

Дмитрий Билик
(Dmitriy Bilyk)
School of Mathematics, University of Minnesota,
Minneapolis, MN, USA
E-mail: dbilyk@math.umn.edu

Поступила в редакцию
21.12.2015 и 13.12.2016

Майкл Т. Лэйси
(Michael T. Lacey)
School of Mathematics, Georgia Institute of
Technology, Atlanta, GA, USA
E-mail: lacey@math.gatech.edu