C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 249-252, 1989

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Le problème d'équivalence à une divergence près dans le calcul des variations des intégrales multiples

Niky KAMRAN et Peter J. OLVER

Résumé — Il est démontré que le problème d'équivalence à une divergence près des fonctionnelles du premier ordre dans le calcul des variations des intégrales multiples peut se mettre sous la forme d'un problème d'équivalence de Cartan.

On the problem of equivalence up to a divergence in the calculus of variations for multiple integrals

Abstract — It is shown that the problem of equivalence up to a divergence of first-order functionals in the calculus of variations for multiple integrals can be cast in the form of a Cartan equivalence problem.

Soit $\mathscr{I}$ la fonctionnelle variationnelle du premier ordre définie par

$$\mathscr{I}(s)=\int_{\mathbb{R}^p}(j^1 s)^*\,\omega, \tag{1}$$

où

$$\omega=\mathrm{L}(x^i, u^\alpha, p^\beta{}_j)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^p, \tag{2}$$

est une p-forme semi-basique sur le fibré de jets $\mathrm{J}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ muni de coordonnées locales $(x^i, u^\alpha, p^\beta{}_j)$, $1\leqq i, j\leqq p$, $1\leqq\alpha, \beta\leqq q$, dans lequel le module $\Omega^{(1)}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ des 1-formes de contact est engendré par

$$\theta^\alpha=du^\alpha-p^\alpha{}_i\,dx^i, \tag{3}$$

où $1\leqq\alpha\leqq q$, et $j^1 s:\mathbb{R}^p\to\mathrm{J}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est le jet d'ordre 1 d'une application $s:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ de rang p.

Le problème de l'équivalence de deux fonctionnelles $\mathscr{I}$ et $\bar{\mathscr{I}}$ par rapport au pseudo-groupe infini des difféomorphismes locaux $\mathrm{pr}^1\Phi$ de $\mathrm{J}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ obtenus par prolongement [1] des difféomorphismes locaux Φ de $\mathrm{J}^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ peut être envisagé des deux points de vue suivants :

(i) Déterminer Φ tel que la condition

$$(\bar{\mathscr{I}}\circ\mathrm{pr}^1\Phi)(s)=\mathscr{I}(s), \tag{4}$$

soit satisfaite pour toute application $s:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ de rang p, ou encore le *problème d'équivalence simple.*

(ii) Déterminer Φ tel que la condition (5) soit satisfaite pour toute *extrémale* $s:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, ou encore le *problème d'équivalence à une divergence près.*

Le problème d'équivalence simple se ramène de manière à peu près immédiate à un *problème d'équivalence de Cartan* [2] ou encore un problème d'isomorphisme local de G-structures: étant donnés deux corepères $(\omega^a{}_\mathrm{U})_{1\leqq a\leqq n}$ et $(\bar{\omega}^b{}_\mathrm{V})_{1\leqq b\leqq n}$ sur des ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$, et un sous-groupe de Lie G de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, déterminer l'ensemble des difféomorphismes $f:\mathrm{U}\to\mathrm{V}$ tels que $f^*\,\bar{\omega}^a{}_\mathrm{V}=\gamma^a{}_b\,\omega^b{}_\mathrm{U}$, où $(\gamma^a{}_b)$ est une application de U dans G.

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

0249-6291/89/03080249 $ 2.00

Le problème d'équivalence simple a été étudié de manière approfondie dans le cas $p=2$, $q=1$ par Cartan [3], Debever [4] et Gardner et Shadwick [5]. La formulation du problème d'équivalence à une divergence près comme problème d'équivalence de Cartan est par contre un problème non-trivial qui n'a été considéré que récemment, *cf.* Bryant [6] qui étudie le cas, $p=1$, $q\geqq 1$ et Kamran et Olver [7] qui en donnent une formulation et une solution complète dans le cas $p=1=q$. Notre but dans cette Note est de présenter une formulation du problème d'équivalence à une divergence près comme problème d'équivalence de Cartan pour p et q *quelconques.*

Notons qu'en vertu d'un théorème classique [1], la condition (4) est satisfaite pour toute extrémale si

$$(\mathrm{pr}^1\,\Phi)^*\,\bar{\omega}\equiv\omega+d\omega_{p-1}\ \bmod \theta^1\ldots\theta^q,\ d\theta^1,\ldots,d\theta^q \tag{5}$$

où

$$\omega_{p-1}=\mathrm{F}_i\,dx^{\hat{i}},\qquad dx^{\hat{i}}=(-1)^{i+1}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^p, \tag{6}$$

et où la divergence totale $\mathrm{Div}\,\mathrm{F}$ de $\mathrm{F}={}^t(\mathrm{F}_1\ldots\mathrm{F}_p)$, définie par

$$d\omega_{p-1}\equiv\mathrm{Div}\,\mathrm{F}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^p\ \bmod \theta^1\ldots\theta^q,\ d\theta^1,\ldots,d\theta^q \tag{7}$$

ne dépend que des variables x^i, u^α et $p^\beta{}_j$, de manière à préserver l'ordre de $\mathscr{I}$. Soit $\mathbb{R}^p$ l'espace vectoriel auxiliaire dans lequel F prend ses valeurs, muni de sa structure de variété standard avec des coordonnées $(w^1,\ldots,w^p)$.

THÉORÈME. — *Il existe un difféomorphisme local* $\Phi:\mathrm{J}^0(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)\to\mathrm{J}^0(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ *tel que les conditions d'équivalence* (5), (6) *et* (7) *soient satisfaites si, et seulement si, il existe un difféomorphisme local* $\Phi:\mathrm{J}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)\times\mathbb{R}^p\to\mathrm{J}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)\times\mathbb{R}^p$, *solution du problème d'équivalence de Cartan donné par*

$$\tilde{\Phi}^*\begin{bmatrix}\bar{\theta}\\ \bar{\omega}\\ \bar{\pi}\\ \bar{\nu}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}&0&0&0\\ \mathrm{B}&\mathrm{J}&0&0\\ \mathrm{C}&\mathrm{DJ}&\mathrm{E}&0\\ \mathrm{Q}&\mathrm{TR}&\mathrm{TM}&\mathrm{T}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ \pi\\ \nu\end{bmatrix}, \tag{8}$$

où

$$\theta=(\theta^\alpha=du^\alpha-p^\alpha{}_i\,dx^i),\qquad \omega=(\omega^i=\mathrm{L}^{1/p}\,dx^i), \tag{9}$$

$$\pi=(\pi^\alpha{}_i=\mathrm{L}^{-1/p}\,dp^\alpha{}_i),\qquad \nu=(\nu^i=\mathrm{L}^{1/p-1}\,dw^i), \tag{10}$$

$$\mathrm{A}=(\mathrm{A}^\alpha{}_\beta),\qquad \mathrm{B}=(\mathrm{B}^i{}_\alpha),\qquad \mathrm{J}=(\mathrm{J}^i{}_j),\qquad \mathrm{C}=(\mathrm{C}^\alpha{}_{i\beta}), \tag{11}$$

$$\mathrm{D}=(\mathrm{D}^\alpha{}_{ij})={}^t\mathrm{D}=(\mathrm{D}^\alpha{}_{ji}),\qquad \mathrm{E}=(\mathrm{E}^\alpha{}_i{}^j{}_\beta)=\mathrm{A}\otimes{}^t\mathrm{J}^{-1}=(\mathrm{A}^\alpha{}_\beta\,(\mathrm{J}^{-1})^j{}_i), \tag{12}$$

$$\mathrm{Q}=(\mathrm{Q}^i{}_\alpha),\qquad \mathrm{R}=(\mathrm{R}^i{}_j),\qquad \mathrm{M}=(\mathrm{M}^j{}_\alpha{}^k)=-{}^t\mathrm{M}=-(\mathrm{M}^k{}_\alpha{}^j), \tag{13}$$

$$\mathrm{T}=(\mathrm{T}^i{}_j)=\frac{\mathrm{J}}{\det\mathrm{J}},\qquad \det\mathrm{J}=1+\mathrm{tr}\,\mathrm{R}, \tag{14}$$

et où A *et* J *sont respectivement à valeurs dans* $\mathrm{GL}(p,\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{GL}(q,\mathbb{R})$.

Démonstration. — Rappelons le résultat suivant [1]. Si $f^0:\mathrm{J}^\infty(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)\to\mathbb{R}^p$ est une application telle que $g:=\mathrm{Div}\,f^0$ soit une application de $\mathrm{J}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe des applications $f^1:\mathrm{J}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)\to\mathbb{R}^p$ et $f^2:\mathrm{J}^\infty(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)\to\mathbb{R}^p$ telles que $f^0=f^1+f^2$ et

$\mathrm{Div} f^2 = 0$. De plus, les composantes $f^1_1, \ldots, f^1_p$ de f^1 satisfont

$$\frac{\partial f^1_i}{\partial p^\alpha_j} = -\frac{\partial f^1_j}{\partial p^\alpha_i}. \tag{15}$$

Étant donné $\Phi : J^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \to J^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tel que les conditions (5), (6) et (7) soient satisfaites, nous définissons $\tilde{\Phi} : J^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \times \mathbb{R}^p \to J^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \times \mathbb{R}^p$ par les relations

$$\tilde{\Phi}\big|_{J^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)} = \mathrm{pr}^1 \Phi, \qquad \bar{w}^i{}_0 \tilde{\Phi} = \mathscr{L}^{1/p} T^i{}_j (w^j + F_j), \tag{16}$$

$$\mathscr{L} = \frac{\bar{L}_0 \,\mathrm{pr}^1 \Phi}{L}, \qquad J = \mathscr{L}^{1/p} \mathbb{D} \varphi, \tag{17}$$

où $\mathbb{D} \varphi = (D_i \varphi^j)$ est la dérivée de Fréchet totale définie par

$$(\mathrm{pr}^1 \Phi)^* d\bar{x}^i \equiv D_j \varphi^i dx^j \mod \theta^1 \ldots \theta^q. \tag{18}$$

Grâce à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} J^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) & \xrightarrow{\mathrm{pr}^1 \Phi} & J^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \\ {\scriptstyle \pi^1_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^1_0} \\ J^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) & \xrightarrow[\Phi]{} & J^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q), \end{array} \tag{19}$$

à la condition de contact

$$(\mathrm{pr}^1 \Phi)^* \Omega^{(1)}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) = \Omega^{(1)}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q), \tag{20}$$

et à la relation (15), on vérifie par calcul direct que les conditions (8) à (14) sont satisfaites. Réciproquement, soit $\tilde{\Phi}$ un difféomorphisme local tel que les conditions (8) à (14) soient satisfaites. De la structure triangulaire par blocs du sous-groupe de $GL(2p+q+pq, \mathbb{R})$ défini par le membre de droite de l'équation (8), il résulte qu'il existe un difféomorphisme local $\Phi : J^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \to J^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tel que la condition (16) soit satisfaite, avec $\mathscr{L} = \bar{L}_0 \,\mathrm{pr}^1 \Phi / L$. Nous avons donc

$$(\mathrm{pr}^1 \Phi)^* \bar{\omega}^1 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^p \equiv \det J \,\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^p \mod \theta^1 \ldots \theta^q,$$

et nous devons démontrer que $\det J = 1 + (\mathrm{Div}\, F/L)$, où les composantes de F vérifient les relations d'antisymétrie (15). Soient $\omega_{p-1} = F_i \, dx^{\hat{i}}$ et $\bar{\omega}_{p-1} = \bar{F}_i \, d\bar{x}^{\hat{i}}$ la $(p-1)$-forme correspondante telle que $(\mathrm{pr}^1 \Phi)^* \bar{\omega}_{p-1} = \omega_{p-1}$. Nous avons

$$(\mathrm{pr}^1 \Phi)^* \bar{\omega}_{p-1} \equiv \tilde{T}^i{}_j F_j (\mathrm{pr}^1 \Phi)^* d\bar{x}^{\hat{i}} \mod \theta^1 \ldots \theta^q,$$

où $\tilde{T} = \mathbb{D} \varphi / \det(\mathbb{D} \varphi) = \mathscr{L}^{1-1/p} T$. Nous en déduisons que

$$(\mathrm{pr}^1 \Phi)^* d\bar{\omega}_{p-1} \equiv (\tilde{T}^{-1})^i{}_m \hat{D}_m (\tilde{T}^i{}_j F_j) \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p \mod \Omega^{(2)}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q),$$

où $\hat{D}_m$ est la dérivée totale sur $J^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. Et utilisant l'équation (7), nous avons donc $\mathrm{Div}\, F = \mathrm{tr}(\tilde{T}^{-1} \mathbb{D}(\tilde{T} F))$, ce qui donne l'identité requise grâce à la relation $\tilde{T} = \mathscr{L}^{1-1/p} T$. Enfin, la condition (15) est satisfaite puisque ${}^t M = -M$, ce qui achève la démonstration.

Nous concluons en remarquant que dans les cas $p = 2$, q arbitraire et $p \geqq 2$, $q = 1$, la solution du problème d'équivalence à une divergence près requiert le prolongement des premières équations de structure, en contraste avec le problème d'équivalence simple.

Note remise le 19 septembre 1988, acceptée après révision le 10 janvier 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. J. OLVER, *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, 107, Springer-Verlag, New York, 1986.

[2] E. CARTAN, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*, Hermann, Paris, 1933.

[3] E. CARTAN, *Ann. Ec. Normale*, 25, 1908, p. 57.

[4] R. DEBEVER, dans *Comptes Rendus de l'A.F.A.S.*, octobre 1945, Paris, p. 83.

[5] R. B. GARDNER et W. F. SHADWICK, dans *Global differential geometry and global analysis*, FERUS et coll. ed., *Springer Lecture Notes in Mathematics*, n° 1156, Springer-Verlag, New York, 1984.

[6] R. BRYANT, *Contemporary Mathematics*, 68, 1987, p. 65.

[7] N. KAMRAN et P. J. OLVER, The equivalence problem for particle Lagrangians on the line, *J. Differential Equations*, 1989 (à paraître).

N. K. : *Department of Applied Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, N2L 3G1, Canada;*

P. J. O. : *School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, 55455, U.S.A.*