TOPOLOGISKE MODULÆRE FORMER

John Rognes

20.03.01

Gruppoider

Grafer, små kategorier og gruppoider. En graf, eller en liten pre-kategori, består av en mengde objekter $\mathcal{O}$, en mengde morfismer $\mathcal{M}$ og to funksjoner $t\colon \mathcal{M} \to \mathcal{O}$ (target) og $s\colon \mathcal{M} \to \mathcal{O}$ (source).

Vi kan danne fiberproduktene $\mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} = \{(f, g) \mid s(f) = t(g)\} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} = \{(f, g, h) \mid s(f) = t(g), s(g) = t(h)\} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Disse består av komposable par eller tripler av morfismer. Det er naturlige projeksjoner $p_1, p_2\colon \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, med $p_1(f, g) = f$, $p_2(f, g) = g$. La $\Delta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ være diagonalen $\Delta(f) = (f, f)$.

En liten kategori består av en graf sammen med funksjoner $id\colon \mathcal{O} \to \mathcal{M}$ (identity) og $c\colon \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ (composition). Det forutsettes at $t \circ id = 1_{\mathcal{O}} = s \circ id$ er identiteten på $\mathcal{O}$, og at $t \circ c = t \circ pr_1$ og $s \circ c = s \circ pr_2$. Videre forutsettes at

$$c \circ (id \circ t \times 1_{\mathcal{M}}) \circ \Delta = 1_{\mathcal{M}} = c \circ (1_{\mathcal{M}} \times id \circ s) \circ \Delta$$

er identiteten på $\mathcal{M}$, og at

$$c \circ (c \times_{\mathcal{O}} 1_{\mathcal{M}}) = c \circ (1_{\mathcal{M}} \times_{\mathcal{O}} c)$$

som avbildninger $\mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

En gruppoide er en liten kategori hvor alle morfismene er invertible. Den består av en kategori sammen med en funksjon $i\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ (inverse), slik at $t \circ i = s$, $s \circ i = t$, og

$$c \circ (1_{\mathcal{M}} \times i) \circ \Delta = id \circ t$$

og

$$c \circ (i \times 1_{\mathcal{M}}) \circ \Delta = id \circ s$$

som avbildninger $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Kategorier med ett objekt. En graf med ett objekt kan identifiseres med morfismemengden $\mathcal{M}$, som mengde.

En monoide M er en kategori med ett objekt, $\mathcal{O} = *$. Vi identifiserer monoiden med mengden av morfismer $M = \mathcal{M}$. Enhetselementet er $e = id(*) \in M$ og multiplikasjonen er $c\colon M \times M \to M$, som tar $(f, g) \in M \times M$ til monoide-produktet $fg \in M$.

En gruppe G er en gruppoide med ett objekt, $\mathcal{O} = *$. Vi identifiserer gruppen med mengden av morfismer $G = \mathcal{M}$. I tillegg til enhetselementet $e \in G$ og multiplikasjonen $c\colon G \times G \to G$ har gruppen også inversen $i\colon G \to G$, som tar g til g^{-1}.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

En splitt gruppoide. La G være en gruppe og la X være en høyre G-mengde. Da finnes det en gruppoide med objekter $\mathcal{O} = X$ og morfismer $\mathcal{M} = X \times G$. Funksjonene $t, s \colon X \times G \to X$ er gitt ved $t(x,g) = x$, $s(x,g) = xg$. Vi oppfatter altså (x,g) som en morfisme fra xg til x:

$$x \xleftarrow{g} xg$$

Vi har identifikasjoner $\mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \cong X \times G \times G$, som tar (x,g,h) til $((x,g),(xg,h))$, og tilsvarende for $\mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \cong X \times G \times G \times G$. Da er $p_1, p_2 \colon X \times G \times G \to X \times G$ gitt ved $p_1(x,g,h) = (x,g)$ og $p_2(x,g,h) = (xg,h)$.

Gruppoiden har identitet $id \colon X \to X \times G$ og komposisjon $c \colon X \times G \times G \to X \times G$ gitt ved $id(x) = (x,e)$ og $c(x,g,h) = (x,gh)$. Her er $e \in G$ enheten i gruppen. Gruppoiden har invers $i \colon X \times G \to X \times G$ gitt ved $i(x,g) = (xg, g^{-1})$. En slik gruppoide kalles en splitt gruppoide.

Nerven til en kategori. Nerven til en liten kategori $\mathcal{C}$ er den simplisielle mengden $N\mathcal{C} \colon \Delta^{op} \to \mathcal{E}ns$ som tar $[q] \in \Delta$ til mengden $N_q\mathcal{C}$ av funktorer $[q] \to \mathcal{C}$. Her oppfattes $[q]$ som kategorien $\{0 \leftarrow 1 \leftarrow \cdots \leftarrow q\}$. Da er

$$\begin{aligned} N_q\mathcal{C} &= \{(f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{M}^q \mid s(f_i) = t(f_{i+1}) \text{ for } 1 \le i < q\} \\ &\cong \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \cdots \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \end{aligned}$$

Fasett-avbildningene er gitt ved

$$d_q^i(f_1, \dots, f_q) = \begin{cases} (f_2, \dots, f_q) & i = 0 \\ (f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_q) & 0 < i < q \\ (f_1, \dots, f_{q-1}) & i = q\,. \end{cases}$$

Degenerasjons-avbildningene er

$$s_q^j(f_1, \dots, f_q) = (f_1, \dots, f_j, id(c), f_{j+1}, \dots, f_q)$$

hvor $c = s(f_j) = t(f_{j+1}) \in \mathcal{O}$.

Når $\mathcal{C}$ er den splitte gruppoiden assosiert til en høyre G-mengde X er $N_q\mathcal{C} \cong X \times G^q$ mengden av diagrammer:

$$x \xleftarrow{g_1} xg_1 \xleftarrow{g_2} \dots \xleftarrow{g_q} xg_1 \cdots g_q$$

Da er $N\mathcal{C} = B(X,G)$ lik bar-konstruksjonen på (X,G). Dens geometriske realisering $|N\mathcal{C}| = |B(X,G)| \cong X \times_G EG$ er Borel-konstruksjonen på X. For $X = *$ er dette lik $* \times_G EG = BG$.

La $H \subset G$ være grupper og $Y \subset X$ mengder, slik at inklusjonen $Y \to X$ er $(H \to G)$-ekvivariant. Anta at den induserte funksjonen

$$Y \times_H G \to X$$

er en bijeksjon. Dette betyr at alle G-banene i X møter Y, og stabilisatoren i G til elementene i Y er inneholdt i H. Da er avbildningen $B(Y,H) \to B(X,G)$ av nervene til de tilhørende splitte gruppoidene en homotopiekvivalens:

$$|B(Y,H)| = Y \times_H EH \xrightarrow{\simeq} Y \times_H EG \cong Y \times_H G \times_G EG \cong X \times_G EG = |B(X,G)|$$

Vi vil senere fortolke dette som et ringskifte-teorem.

Hopf algebroider

Vi vil arbeide over grunnringen $\mathbb{Z}$, men alt vi sier kan lett generaliseres til å gjelde over en vilkårlig kommutativ grunnring k. Da erstattes alle ringer og ring-homomorfier med k-algebraer og k-algebra-homomorfier, og alle tensor-produkter dannes over k.

Hopf algebroider. For kommutative ringer (alltid assosiative med enhet) A, R, la $\mathrm{Hom}(A, R) = \{f : A \to R\}$ være mengden av ring-homomorfier fra A til R. Vi sier at funktoren $R \mapsto \mathrm{Hom}(A, R)$ fra kommutative ringer til mengder er korepresentert av A.

Anta gitt to kommutative ringer A, Γ og ring-homomorfier $\eta_L, \eta_R : A \to \Gamma$ (left unit, right unit). For hver kommutativ ring R er $\mathcal{O} = \mathrm{Hom}(A, R)$ og $\mathcal{M} = \mathrm{Hom}(\Gamma, R)$ mengdene av objekter og morfismer i en graf, med $t, s : \mathrm{Hom}(\Gamma, R) \to \mathrm{Hom}(A, R)$ gitt ved prekomposisjon med henholdvis η_L og η_R. Så $t(f) = f \circ \eta_L$ og $s(f) = f \circ \eta_R$. Vi kaller η_L venstre-enheten og η_R høyre-enheten.

Strukturen $(A, \Gamma, \eta_L, \eta_R)$ korepresenterer grafer.

Vi oppfatter Γ som en A-bimodul, med venstre A-modulstruktur fra venstre-enheten $\eta_L : A \to \Gamma$, og med høyre A-modulstruktur fra høyre-enheten $\eta_R : A \to \Gamma$. Vi kan danne tensor-produktene $\Gamma \otimes_A \Gamma$ og $\Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A \Gamma$ med hensyn på denne A-bimodulstrukturen. Det er naturlige ring-homomorfier $i_1, i_2 : \Gamma \to \Gamma \otimes_A \Gamma$, gitt ved $i_1(x) = x \otimes 1$ og $i_2(x) = 1 \otimes x$. Ekvivalent er $i_1 = 1 \otimes \eta_L$ sammensetningen

$$\Gamma \cong \Gamma \otimes_A A \xrightarrow{1\otimes\eta_L} \Gamma \otimes_A \Gamma$$

og $i_2 = \eta_R \otimes 1$. La $\phi : \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma$ være ringproduktet $\phi(a \otimes b) = ab$.

Anta videre gitt ring-homomorfier $\epsilon : \Gamma \to A$ (counit) og $\psi : \Gamma \to \Gamma \otimes_A \Gamma$ (coproduct), slik at $\epsilon\eta_L = 1_A = \epsilon\eta_R$ er identiteten på A, og at $\psi\eta_L = i_1\eta_L$ og $\psi\eta_R = i_2\eta_R$. Videre forutsettes at

$$\phi(\eta_L\epsilon \otimes 1_\Gamma)\psi = 1_\Gamma = \phi(1_\Gamma \otimes \eta_R\epsilon)\psi$$

er identiteten på Γ, og at

$$(\psi \otimes 1_\Gamma)\psi = (1_\Gamma \otimes \psi)\psi\,.$$

Da er grafen en liten kategori, med enhet $id : \mathrm{Hom}(A, R) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, R)$ gitt ved prekomposisjon med ϵ, og komposisjon

$$c : \mathrm{Hom}(\Gamma, R) \times_{\mathrm{Hom}(A,R)} \mathrm{Hom}(\Gamma, R) \cong \mathrm{Hom}(\Gamma \otimes_A \Gamma, R) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, R)$$

gitt ved prekomposisjon med ψ. Så $id(f) = f \circ \epsilon$ og $c(f, g) = (f \otimes g) \circ \psi$. Dersom $\psi(x) = \sum_i x'_i \otimes x''_i$ i $\Gamma \otimes_A \Gamma$ er $c(f, g)(x) = \sum_i f(x'_i)g(x''_i)$, der produktet dannes i R. Strukturen $(A, \Gamma, \eta_L, \eta_R, \epsilon, \psi)$ korepresenterer små kategorier.

Til slutt, anta gitt en ring-homomorfi $\chi : \Gamma \to \Gamma$ (conjugation) slik at $\chi\eta_L = \eta_R$, $\chi\eta_R = \eta_L$, og

$$\phi(1_\Gamma \otimes \chi)\psi = \eta_L \circ \epsilon$$

og

$$\phi(\chi \otimes 1_\Gamma)\psi = \eta_R \circ \epsilon$$

som ring-homomorfier $\Gamma \to \Gamma$, for passende faktoriseringer $\Gamma \otimes_A \Gamma \to \Gamma$ av $\phi(1_\Gamma \otimes \chi)$ og $\phi(\chi \otimes 1_\Gamma)$ over $\Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma \otimes_A \Gamma$.

Da er den lille kategorien en gruppoide, med invers $i : \mathrm{Hom}(\Gamma, R) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, R)$ gitt ved prekomposisjon med χ. Så $i(f) = f \circ \chi$. Strukturen $(A, \Gamma, \eta_L, \eta_R, \epsilon, \psi, \chi)$ korepresenterer gruppoider.

Definisjon. En Hopf algebroide er et par av kommutative ringer (A, Γ), med strukturavbildninger $\eta_L, \eta_R \colon A \to \Gamma$, $\epsilon \colon \Gamma \to A$, $\psi \colon \Gamma \to \Gamma \otimes_A \Gamma$ og $\chi \colon \Gamma \to \Gamma$ som oppfyller betingelsene ovenfor.

Referanse: [Ra86, A1].

Lemma. *Gitt en Hopf algebroide* (A, Γ) *og en kommutativ ring* R *er* $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ *en gruppoide, med* $\mathcal{O} = \mathrm{Hom}(A, R)$, $\mathcal{M} = \mathrm{Hom}(\Gamma, R)$ *og strukturavbildinger gitt som ovenfor.*

Hopf algebraer. En Hopf algebroide (A, Γ) med $A = \mathbb{Z}$ (grunn-ringen) kalles en (kommutativ) Hopf algebra Γ. Da er $\eta_L = \eta_R \colon \mathbb{Z} \to \Gamma$ den entydige ring-homomorfien, mens augmentasjonen $\epsilon \colon \Gamma \to \mathbb{Z}$, koproduktet $\psi \colon \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$ og konjugasjonen $\chi \colon \Gamma \to \Gamma$ er gitt som ekstra struktur.

Hopf algebroider korepresenterer grupper, i den forstand at for hver kommutativ ring R er $G = \mathrm{Hom}(\Gamma, R)$ en gruppe med enhet, produkt og invers indusert av ϵ, ψ og χ.

Splitte Hopf algebroider. La G være en endelig gruppe og X en høyre G-mengde. Den tilhørende splitte gruppoiden med $\mathcal{O} = X$ og $\mathcal{M} = X \times G$ er korepresentert over $\mathbb{Z}$ av en Hopf algebroide (A, Γ), der $A = \{a \colon X \to \mathbb{Z}\}$ og $\Gamma = \{X \times G \to \mathbb{Z}\} \cong C^1(G; A)$.

Her er A ringen av heltallsfunksjoner på X og Γ er ringen av heltallsfunksjoner på $X \times G$, som identifiseres med ringen $C^1(G; A) = \{f \colon G \to A\}$ av funksjoner fra G til A, oppfattet som 1-kokjeder på G med verdier i A. Mer generelt skriver vi $C^q(G; A)$ for ringen av funksjoner fra G^q til A, oppfattet som q-kokjeder på G med verdier i A. Høyre-virkningen av G på X gir en venstre-virkning av G på A, ved $(ga)(x) = a(xg)$, for $g \in G$, $a \in A$, $x \in X$.

Det er en naturlig avbildning $C^1(G; A) \otimes_A C^1(G; A) \to C^2(G; A)$, som tar $f_1 \otimes f_2$ til $(x, g, h) \mapsto f_1(x, g) f_2(xg, h)$, oppfattet som 2-kokjede $G^2 \to A$. Dette er en isomorfi for G endelig, så koproduktet $\psi \colon C^1(G; A) \to C^1(G; A) \otimes_A C^1(G; A)$ kan like godt defineres som en avbildining $C^1(G; A) \to C^2(G; A)$.

Strukturavbildningene i Hopf algebroiden $(A, C^1(G; A))$ er da som følger:

$$\begin{aligned}
\eta_L(a) &\colon g \mapsto a \\
\eta_R(a) &\colon g \mapsto ga \\
\epsilon(f) &= f(e) \\
\psi(f) &\colon (g, h) \mapsto f(gh) \\
\chi(f) &\colon g \mapsto f(g^{-1})
\end{aligned}$$

for $g, h \in G$, $a \in A$ og $f \in C^1(G; A)$.

Mer generelt definerer disse formlene en Hopf algebroide $(A, C^1(G; A))$ for enhver kommutativ ring A og endelig gruppe G som virker fra venstre på A gjennom ring-homomorfier.

Slike Hopf algebroider er eksempler på splitte Hopf algebroider:

((Definer en Hopf algebroide komodul.))

Definition. En Hopf algebroide kalles splitt dersom den har formen $(A, A \otimes \Gamma)$ for en Hopf algebra Γ og en Γ-komodul-algebra A.

Dersom $G = \lim_\alpha G_\alpha$ er en profinitt gruppe med $G_\alpha = G/U_\alpha$ endelig for hver α, og $A = \operatorname{colim}_\alpha A^{U_\alpha}$ er en diskret G-modul, så er $(A, C^1_c(G;A))$ også en Hopf algebroide, der

$$C^1_c(G;A) = \operatorname*{colim}_\alpha C^1(G_\alpha; A^{U_\alpha})$$

er de kontinuerlige 1-kosyklene.

Kobar-komplekset. En Hopf algebroide (A,Γ) korepresenterer en gruppoide $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ over hver kommutativ ring R. Nerven $N\mathcal{C}$ til denne gruppoiden er en simplisiell mengde. Denne er korepresentert av en kosimplisiell kommutativ ring

$$[q] \mapsto \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A \cdots \otimes_A \Gamma$$

med q faktorer Γ.

Kofasett-avbildningene er gitt ved

$$d^q_i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{q-1}) = \begin{cases} i_2(x_1) \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{q-1} & i = 0 \\ x_1 \otimes \cdots \otimes \psi(x_i) \otimes \cdots \otimes x_{q-1} & 0 < i < q \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_{q-2} \otimes i_1(x_{q-1}) & i = q\,. \end{cases}$$

Kodegenerasjons-avbildningene er

$$s^q_j(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{q+1}) = (x_1 \otimes \cdots \otimes \epsilon(x_{j+1}) \otimes \cdots \otimes x_{q+1})$$

for $0 \leq j \leq q$.

Det tilhørende kokjedekomplekset $C^*(A,\Gamma)$ kalles kobar-komplekset til Hopf algebroiden (A,Γ) [Ra86, A1.2.11]. I grad q er er

$$C^q(A,\Gamma) = \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A \cdots \otimes_A \Gamma$$

med q faktorer Γ. Korand-avbildningen er

$$d^{q-1} = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i d^q_i \colon C^{q-1}(A,\Gamma) \to C^q(A,\Gamma)\,.$$

Kohomologien av dette komplekset er per definisjon Hopf algebroide kohomologien til (A,Γ):

$$H^n(A,\Gamma) = H^n(C^*(A,\Gamma), d^*)$$

Dersom Γ er flat som (venstre $\Leftrightarrow$ høyre) A-modul er det en abelsk kategori av Γ-komoduler over A, med nok injektive objekter, så man kan definere Ext-grupper $\operatorname{Ext}^*_\Gamma(-,-)$. Da er det en isomorfi

$$H^n(A,\Gamma) \cong \operatorname{Ext}^n_\Gamma(A,A)$$

for alle $n \geq 0$.

Kobar-komplekset til (A,Γ) begynner altså

$$A \xrightarrow{d^0} \Gamma \xrightarrow{d^1} \Gamma \otimes_A \Gamma \to \ldots\,.$$

Her er $d^0(a) = \eta_R(a) - \eta_L(a)$, og $d^1(x) = 1 \otimes x - \psi(x) + x \otimes 1$. Så

$$H^0(A, \Gamma) = \{a \in A \mid \eta_L(a) = \eta_R(a)\}$$

er Γ-invariantene i A, mens $\ker(d^1)$ er de primitive elementene i Γ.

For en endelig gruppe G og en venstre G-modul A er det naturlige isomorfier

$$C^1(G; A) \otimes_A \cdots \otimes_A C^1(G; A) \cong C^q(G; A)\,,$$

med q faktorer $C^1(G; A)$ til venstre. Derfor er (Hopf algebroide) kobar-komplekset $C^*(A, C^1(G; A))$ isomorft med (gruppe) kokjede-komplekset $C^*(G; A)$. Altså er Hopf algebroide kohomologien $H^*(A, C^1(G; A))$ isomorf med gruppe-kohomologien $H^*(G; A)$.

Også for en profinitt gruppe G og en diskret venstre G-modul A er Hopf algebroide kohomologien til $(A, C^1_c(G; A))$ isomorf med den kontinuerlige gruppe-kohomologien $H^*_c(G; A)$ til G med koeffisienter i A.

Formelle gruppelover

La R være en kommutativ ring. En (kommutativ, 1-parameter) formell gruppelov F definert over R er en formell potensrekke $F(z_1, z_2) \in R[[z_1, z_2]]$ slik at $F(F(z_1, z_2), z_3) = F(z_1, F(z_2, z_3))$, $F(z_1, z_2) = F(z_2, z_1)$ og $F(z_1, 0) = z_1$. Da har F formen

$$F(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + \sum_{i,j \geq 1} a_{ij} z_1^i z_2^j$$

for elementer $a_{ij} \in R$, $i, j \geq 1$.

La F, G være formelle gruppelover definert over R. En homomorfi $f \colon F \to G$ av formelle gruppelover definert over R er en formell potensrekke $f(z) \in R[[z]]$ med $f(0) = 0$, slik at $f(F(z_1, z_2)) = G(f(z_1), f(z_2))$. Da har f formen

$$f(z) = \sum_{i \geq 0} b_i z^{i+1}$$

for elementer $b_i \in R$, $i \geq 0$.

Det er en kategori av formelle gruppelover definert over R, der komposisjonen $gf \colon F \to H$ av to homomorfier $g \colon G \to H$ og $f \colon F \to G$ er gitt ved sammensetningen av potensrekker $(gf)(z) = g(f(z))$. En homomorfi $f \colon F \to G$ er en isomorfi i denne kategorien hvis og bare hvis $b_0 = f'(0)$ er en enhet i R. Den inverse formelle potensrekken til $f(z)$ skrives da $f^{-1}(z)$. Vi sier at f er en strikt isomorfi dersom $b_0 = f'(0) = 1$.

La $FGL(R) \subset R[[z_1, z_2]]$ være mengden av formelle gruppelover over R, og la $SI(R) \subset R[[z]]$ være mengden av formelle potensrekker som definerer strikte isomorfier. Da er $SI(R)$ en gruppe under komposisjon, og virker fra høyre på $FGL(R)$ ved $F \cdot f = F^f$ der $F^f(z_1, z_2) = f^{-1}(F(f(z_1), f(z_2)))$. Da er f en strikt isomorfi $f \colon F^f \to F$.

Kategorien av formelle gruppelover og strikte isomorfier over R er altså den splitte gruppoiden $(FGL(R), FGL(R) \times SI(R))$.

Gitt en ring-homomorfi $\phi \colon R \to T$, en formell gruppelov $F(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + \sum_{i,j \geq 1} a_{ij} z_1^i z_2^j$ over R og en homomorfi $f(z) = \sum_{i \geq 0} b_i z^{i+1}$ over R, la $\phi_* F$ være den formelle gruppeloven $\phi_*F(z_1,z_2) = z_1 + z_2 + \sum_{i,j\geq 1} \phi(a_{ij}) z_1^i z_2^j$ over T, og la $\phi_* f$ være homomorfien $\phi_* f(z) = \sum_{i\geq 0} \phi(b_i) z^{i+1}$ over T. Hvis $f\colon F \to G$ vil $\phi_* f\colon \phi_* F \to \phi_* G$.

Mengden $FGL(R)$ av formelle gruppelover er korepresentert av Lazard-ringen L. Per definisjon er $L = P/I$, der $P = \mathbb{Z}[a_{ij} \mid i,j \geq 1]$. Vi lar $F(z_1,z_2) = z_1 + z_2 + \sum_{i,j\geq 1} a_{ij} z_1^i z_2^j \in P[[z_1,z_2]]$ og skriver $F(F(z_1,z_2),z_3) - F(z_1,F(z_2,z_3)) = \sum_{i,j,k} b_{ijk} z_1^i z_2^j z_3^k$ med $b_{ijk} \in P$. Da er I det to-sidige idealet generert av b_{ijk} og $a_{ij} - a_{ji}$ for alle i,j,k. Vi skriver $a_{ij} \in L$ også for bildet av $a_{ij} \in P$. Da er $F(z_1,z_2) \in L[[z_1,z_2]]$ en formell gruppelov over L.

Det er en bijeksjon $\mathrm{Hom}(L,R) \cong FGL(R)$ som tar $\phi\colon L \to R$ til $\phi_* F$. Lazard-ringen L er gradert, med a_{ij} i grad $2(i+j-1)$. Dersom z_1 og z_2 gis grad -2 er $F(z_1,z_2)$ også av grad -2. For graderte ringer R er det en bijeksjon mellom gradsbevarende ringhomomorfier $L \to R$ og grad -2 formelle gruppelover over R.

Det kan vises at $L \cong \mathbb{Z}[x_i \mid i \geq 1]$, med x_i i grad $2i$.

Gruppen $SI(R)$ av strikte isomorfier er korepresentert av en Hopf algebra $B = \mathbb{Z}[b_i \mid i \geq 1]$. Det er en bijeksjon $\mathrm{Hom}(B,R) \cong SI(R)$ som tar $\psi\colon B \to R$ til $f(z) = z + \sum_{i\geq 1} \psi(b_i) z^{i+1} \in R[[z]]$. Hopf algebraen B er gradert, med b_i i grad $2i$. Dersom z gis grad -2 har $f(z)$ også grad -2. For graderte ringer R er det en bijeksjon mellom gradsbevarende ringhomomorfier $B \to R$ og grad -2 formelle potensrekker som definerer strikte isomorfier over R.

Enheten i $SI(R)$ svarer til koenheten $\epsilon\colon B \to \mathbb{Z}$ med $b_i \mapsto 0$ for alle $i \geq 1$. Gruppe-produktet i $SI(R)$ svarer til koproduktet $\psi\colon B \to B \otimes_{\mathbb{Z}} B$, gitt ved

$$\sum_{k\geq 0} \psi(b_k) = \sum_{i\geq 0} b_i \otimes \left(\sum_{j\geq 0} b_j\right)^{i+1} .$$

Her har b_i grad $2i$, b_0 leses som 1, og $\psi(b_k)$ er gitt ved å regne ut høyresiden i grad $2k$. Gruppe-inversen i $SI(R)$ svarer til konjugasjonen $\chi\colon B \to B$, som er bestemt av

$$\sum_{i\geq 0} \chi(b_i) \left(\sum_{j\geq 0} b_j\right)^{i+1} = 1 .$$

Tensor-produktet $LB = L \otimes_{\mathbb{Z}} B \cong L[b_k \mid k \geq 1]$ korepresenterer par (F,f), der F er en formell gruppelov og f er en formell potensrekke, som kan oppfattes som en strikt isomorfi $f\colon F^f \to F$. Dette er nettopp morfismene i kategorien av formelle gruppelover og strikte isomorfismer. La $\iota\colon B \to LB$ og $\eta_L\colon L \to LB$ være inklusjonene i tensorproduktet.

Høyre-enheten $\eta_R\colon L \to LB$, som gir B-komodul-strukturen på L, kan spesifiseres som følger. La F være Lazards formelle gruppelov over L, oppfattet som definert over LB via inklusjonen $\eta_L\colon L \to LB$, og la $f(z) = z + \sum_{i\geq 1} b_i z^{i+1}$ være en formell potensrekke, definert over LB via inklusjonen $\iota\colon B \to LB$. Da er $F^f(z_1,z_2) = f^{-1}(F(f(z_1),f(z_2)))$ en formell gruppelov over LB, og som sådan korepresentert av en ring homomorfi $L \to LB$. Dette er høyre-enheten $\eta_R\colon L \to LB$.

Proposisjon. *Det er en splitt gradert Hopf algebroide (L, LB), som korepresenterer kategorien av formelle gruppelover og strikte isomorfier.*

En ring-homomorfi $\psi\colon LB \to R$ klassifiserer en strikt isomorfi $f\colon F^f \to F$, der den formelle potensrekken f er klassifisert av $\psi\iota$, den formelle gruppeloven F er klassifisert av $\psi\eta_L$, og den formelle gruppeloven F^f er klassifisert av $\psi\eta_R$.

Hvis vi neglisjerer graderingen, er $L = \mathbb{Z}[x_i \mid i \geq 1]$ ringen av regulære funksjoner på et uendelig-dimensjonalt affint rom $\mathbb{A}^\infty_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec} L$, og $\Gamma = SI(\mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}(B, \mathbb{Z})$ er gruppen av heltallige potensrekker

$$f(z) = z + \sum_{i \geq 1} b_i z^{i+1} \in \mathbb{Z}[[z]]$$

under komposisjon. Et punkt i L definert over $\mathbb{Z}$ svarer til en ring-homomorfi $L \to \mathbb{Z}$, som igjen svarer til en formell gruppelov F definert over $\mathbb{Z}$. Gruppen Γ virker fra høyre på punktene i $\operatorname{Spec} L$, ved $F \cdot f = F^f$. Banene til denne virkningen er de strikte isomorfiklassene av formelle gruppelover definert over $\mathbb{Z}$.

Referanse: [Ra92, B.4].

Flate ringspektra

La E være et kommutativt ringspektrum (alltid assosiativt og unitalt), med enhet $\eta\colon S \to E$ og multiplikasjon $\mu\colon E \wedge E \to E$. Da er $E_* = \pi_*(E)$ og $E_*E = \pi_*(E \wedge E)$ graderte kommutative ringer.

Avbildningen $1 \wedge \eta\colon E \cong E \wedge S \to E \wedge E$ induserer en venstre enhet $\eta_L\colon E_* \to E_*E$, mens avbildningen $\eta \wedge 1\colon E \cong S \wedge E \to E \wedge E$ induserer en høyre enhet $\eta_R\colon E_* \to E_*E$.

Vi antar at E er et flatt ringspektrum, dvs. at E_*E er flat som venstre E_*-modul. (Dette er ekvivalent med at E_*E er flat som høyre E_*-modul.)

Avbildningen $1 \wedge \mu \wedge 1\colon (E \wedge E) \wedge (E \wedge X) \to E \wedge E \wedge X$ induserer da en isomorfi

$$E_*E \otimes_{E_*} E_*(X) \xrightarrow{\cong} \pi_*(E \wedge E \wedge X)$$

[Ra86, 2.2.7], og avbildningen $1 \wedge \eta \wedge 1\colon E \wedge X \cong E \wedge S \wedge X \to E \wedge E \wedge X$ induserer en kovirkning

$$\nu\colon E_*(X) \to E_*E \otimes_{E_*} E_*(X)$$

som gjør $E_*(X)$ til en E_*E-komodul. Spesielt, for $X = E$ har vi koproduktet

$$\psi\colon E_*E \to E_*E \otimes_{E_*} E_*E\,.$$

Multiplikasjonen $\mu\colon E \wedge E \to E$ induserer koenheten $\epsilon\colon E_*E \to E_*$, og twist-avbildningen $\tau\colon E \wedge E \to E \wedge E$ induserer konjugasjonen $\chi\colon E_*E \to E_*E$.

Proposisjon [Ra86, 2.2.8]**.** *La E være et flatt kommutativt ringspektrum. Da er (E_*, E_*E) en gradert Hopf algebroide, med strukturavbildninger som gitt ovenfor.*

For eksempel, når $E = H\mathbb{F}_p$ er $E_* = \mathbb{F}_p$ i grad 0 og $E_*E = A_*$ er den duale mod p Steenrod algebraen. Dette er en Hopf algebra over grunnringen $\mathbb{F}_p$.

Når $E = H\mathbb{Z}$ er $E_*E \subset A_*$ ikke flat over $E_* = \mathbb{Z}$ i grad 0.

La E være som i proposisjonen. For et spektrum X er $E_*(X)$ en E_*E-komodul, og kategorien av E_*E-komoduler er abelsk med nok injektiver. Det finnes da en E_*-Adams spektralsekvens for X med

$$E_2^{s,t} = \operatorname{Ext}^{s,t}_{E_*E}(E_*, E_*(X)) \Longrightarrow \pi_{t-s}(X)\,.$$

Her beregnes Ext i kategorien av E_*E-komoduler. For $E = H\mathbb{F}_p$ er dette den klassiske mod p Adams spektralsekvensen. Ext i kategorien av A_*-komoduler er da identifisert med Ext i kategorien av A-moduler. For $E = MU$ er dette Adams–Novikov spektralsekvensen, som med $X = S$ har E_2-ledd lik $E_2^{**} = \mathrm{Ext}_{LB}^{**}(L, L) = H^*(L, LB)$, og konvergerer sterkt mot $\pi_*(S)$.

Vi går her ikke inn på hvilke betingelser på E og X som sikrer konvergens i E_*-Adams spektralsekvensen for X.

Referanse: [Ra86, 2.2].

Komplekst orienterte teorier

((Strikt kompleks orientering gir grad -2 formell gruppelov; avbildning $MU \to E$ av ringspektra; morfisme $(MU_*, MU_*MU) \to (E_*, E_*E)$ av Hopf algebroider.))

Referanse: [Ad74, II].

Kompleks bordisme

Milnor og Novikov bestemte den komplekse bordismeringen $MU_* \cong \mathbb{Z}[x_i \mid i \geq 1]$, med x_i i grad $2i$. Landweber og Novikov bestemte $MU_*MU \cong MU_*[b_k \mid k \geq 1]$, med b_k i grad $2k$. Da er MU et flatt kommutativt ringspektrum, og Hopf algebroiden (MU_*, MU_*MU) er kjent.

Den strikte komplekse orienteringen $\omega \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ av MU gir en formell gruppelov over MU_*, klassifisert av en ring-homomorfi $L \to MU_*$. Avbildningene $MU \cong MU \wedge S \to MU \wedge MU$ og $MU \cong S \wedge MU \to MU \wedge MU$ tar ω til to komplekse orienteringer $\omega_L, \omega_R \in \widetilde{MU \wedge MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, som er strikt isomorfe under konjugasjonen indusert av $\tau\colon MU \wedge MU \cong MU \wedge MU$. Denne strikte isomorfien er klassifisert av en ring-homomorfi $LB \to MU_*MU$.

Quillen viste at $L \to MU_*$ og $LB \to MU_*MU$ gir en isomorfi av Hopf algebroider $(L, LB) \cong (MU_*, MU_*MU)$.

Landweber eksakte spektra

En gradert MU_*-modul R_* bestemmer en homotopifunktor

$$X \mapsto R_*(X) = R_* \otimes_{MU_*} MU_*(X)\,.$$

Dette er en homologiteori dersom R_* er Landweber eksakt, dvs. at for hvert primtall p virker $(p, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ som en regulær sekvens på R_*.

Med notasjonen $I_n = (p, v_1, \ldots, v_{n-1})$ betyr dette at for hvert primtall p og hver $n \geq 0$ er multiplikasjon med v_n

$$\Sigma^{2(p^n-1)} R_*/I_n \xrightarrow{v_n} R_*/I_n$$

en injektiv homomorfi. Da finnes det et representerende spektrum R for homologiteorien $R_*(X)$, med $R_*(X) = \pi_*(R \wedge X)$.

En homomorfi $R_* \to T_*$ av Landweber eksakte MU_*-moduler gir en naturlig transformasjon $R_*(X) \to T_*(X)$ av homologiteorier, som er indusert av en avbildning $R \to T$ av representerende spektra, i den stabile kategorien.

Dersom R_* er en MU_*-algebra klassifiserer enhetshomomorfien $MU_* \to R_*$ en grad -2 formell gruppelov F over R_*. Da skriver vi

$$R_*^F(X) = R_* \otimes_{MU_*}^F MU_*(X)$$

for å fremheve hvordan R_* er gitt som en MU_*-algebra.

Gitt to grad -2 formelle gruppelover $G = F^f, F$ over R_* klassifisert av to ring-homomorfier $L \cong MU_* \to R_*$, som er strikt isomorfe via en strikt isomorfi $f\colon G = F^f \to F$ klassifisert av en ring-homomorfi $\psi\colon LB \cong MU_*MU \to R_*$, så er det en naturlig isomorfi $f^*\colon R^F_*(X) \cong R^G_*(X)$ gitt som sammensetningen

$$R_* \otimes^F_{MU_*} MU_*(X) \xrightarrow{1\otimes\nu} R_* \otimes^F_{MU_*} MU_*MU \otimes_{MU_*} MU_*(X) \xrightarrow{\psi\otimes 1} R_* \otimes^G_{MU_*} MU_*(X)\,.$$

Her er ν kovirkningen av MU_*MU på $MU_*(X)$, og $\psi\colon R_* \otimes^F_{MU_*} MU_*MU \to R_*$ er gitt som produktet av identiteten på R_* og $\psi\colon MU_*MU \to R_*$.

Dersom R_* er Landweber eksakt for begge MU_*-algebra strukturene gir dette en naturlig ekvivalens $f^*\colon R^F_*(X) \to R^G_*(X)$ av homologi-teorier, som er indusert av en avbildning $R^F \to R^G$ av representerende spektra, i den stabile kategorien.

Dersom $f\colon G = F^f \to F$ er en ikke strikt isomorfi, men R_* har formen $R_* = R_0[u, u^{-1}]$ for en enhet u i grad 2, kan man også definere en naturlig ekvivalens $f^*\colon R^F_*(X) \to R^G_*(X)$, som skalerer u med $f'(0) = b_0$. Se [Re98, 6.7] for detaljene.

Lubin–Tate deformasjonsteori

La k være en kropp og la $\Gamma = \Gamma(z_1, z_2) \in k[[z_1, z_2]]$ være en formell gruppelov over k.

En lokal-komplett ring B er en kommutativ ring med et eneste maksimalt ideal $\mathfrak{m}$, slik at $B \cong \lim_n B/\mathfrak{m}^n$. La $\pi\colon B \to B/\mathfrak{m}$ være den kanoniske homomorfien til restkroppen $B/\mathfrak{m}$.

Definisjon. En deformasjon av (k, Γ) til B er et par (G, i) der G er en formell gruppelov over B, og $i\colon k \to B/\mathfrak{m}$ er en homomorfi, slik at $i_*\Gamma = \pi_*G$.

To deformasjoner (G_1, i) og (G_2, i) av (k, Γ) til B er $\star$-isomorfe dersom det finnes en isomorfi $f\colon G_1 \to G_2$ av formelle gruppelover over B, slik at $\pi_*f\colon \pi_*G_1 \to \pi_*G_2$ er identiteten av $i_*\Gamma$. Så $f \in B[[z]]$ oppfyller $f(0) = 0$ og $f(z) \equiv z \mod \mathfrak{m}$. Vi kaller f en $\star$-isomorfi.

Vi kan oppfatte $\operatorname{Spec} B$ som en omegn om punktet $\operatorname{Spec} B/m$. Da er en deformasjon (G, i) en utvidelse av den formelle gruppeloven $i_*\Gamma$ i punktet $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{m}$ til omegnen $\operatorname{Spec} B$, og en $\star$-isomorfi mellom to utvidelser er en isomorfi som er identiteten restriktert til $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{m}$.

Det er en gruppoide $\operatorname{Def}_\Gamma(B)$ av deformasjoner av (k, Γ) til B og $\star$-isomorfier mellom slike. La $\pi_0 \operatorname{Def}_\Gamma(B)$ være mengden av isomorfiklasser i denne gruppoiden, dvs. mengden av $\star$-isomorfiklasser av deformasjoner av (k, Γ) til B. Dette er lik π_0 av nerven til $\operatorname{Def}_\Gamma(B)$.

Teorem (Lubin–Tate). *La k være en kropp i karakteristikk $p > 0$, og la Γ være en formell gruppelov over k av høyde $n < \infty$. Da er funktoren $B \mapsto \pi_0 \operatorname{Def}_\Gamma(B)$ er korepresentabel:*

Det finnes en lokal-komplett ring $LT(k, \Gamma)$ med restkropp $LT(k, \Gamma)/\mathfrak{m} = k$, og en formell gruppelov F over $LT(k, \Gamma)$ med $\pi_*F = \Gamma$, slik at (F, id) er en deformasjon av (k, Γ) til $LT(k, \Gamma)$.

Da er det en bijeksjon $\operatorname{Hom}(LT(k, \Gamma), B) \cong \pi_0 \operatorname{Def}_\Gamma(B)$, som tar $\phi\colon LT(k, \Gamma) \to B$ til $\star$-isomorfiklassen til $(\phi_*F, \bar\phi)$. Her er $\bar\phi\colon k \to B/\mathfrak{m}$ reduksjonen av ϕ modulo det maksimale idealet.

Vi kaller $LT(k,\Gamma)$ Lubin–Tate ringen til (k,Γ), og sier at (F,id) er den universelle deformasjonen av (k,Γ). Spesielt er F den universelt deformerte formelle gruppeloven.

((Litt om homomorfier av lokale ringer ?))

Dette betyr at gitt en deformasjon (G,i) av (k,Γ) til B så finnes det en entydig ring-homomorfi $\phi\colon LT(k,\Gamma)\to B$ med $\bar\phi = i$, og en $\star$-isomorfi $g\colon G\to\phi_*F$. Lubin–Tate viser videre at i dette tilfellet er $\star$-isomorfien g også entydig bestemt av (G,i).

Gruppevirkninger. La $\bar f\colon\Gamma\to\Gamma$ være en automorfi av den formelle gruppeloven Γ, definert over k. La $f\in LT(k,\Gamma)[[z]]$ med $f(0)=0$ være en løftning av $\bar f\in k[[z]]$, så $\pi_*f=\bar f$. Da er $f\colon F^f\to F$ en isomorfi av formelle gruppelover over $LT(k,\Gamma)$, og (F^f,id) er en deformasjon av (k,Γ) til $LT(k,\Gamma)$.

Altså finnes det en ringhomomorfi $\phi\colon LT(k,\Gamma)\to LT(k,\Gamma)$ med $\bar\phi=id$, og en $\star$-isomorfi $g\colon F^f\to\phi_*F$. Her er ϕ og den sammensatte isomorfien $gf^{-1}\colon F\to\phi_*F$ entydig bestemt av $\bar f$. Tilordningen $\bar f\mapsto\phi$ definerer en virkning av automorfigruppen $\mathrm{Aut}(k,\Gamma)$ på den korepresenterende ringen $LT(k,\Gamma)$.

Hvis Γ er definert over en underkropp $k_0\subset k$, så virker også Galois-gruppen $\mathrm{Gal}(k/k_0)$ på $LT(k,\Gamma)$: La $\sigma\colon k\to k$ være en automorfi av k over k_0. Siden Γ er definert over k_0 er $\sigma_*\Gamma=\Gamma$. Da er (F,σ) en deformasjon av (k,Γ) til $LT(k,\Gamma)$.

Altså finnes det en ringhomomorfi $\psi\colon LT(k,\Gamma)\to LT(k,\Gamma)$ med $\bar\psi=\sigma$, og en $\star$-isomorfi $h\colon F\to\psi_*F$. Tilordningen $\sigma\mapsto\psi$ definerer en virkning av Galois-gruppen $\mathrm{Gal}(k/k_0)$ på den korepresenterende ringen $LT(k,\Gamma)$.

Moravas eksempler. La nå $k=\mathbb{F}_{p^n}$ være kroppen med p^n elementer. Denne kan dannes som en grad n utvidelse av $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p$ ved å føye til en primitiv (p^n-1)-te rot av enheten. La $\Gamma=F_n$ være Hondas formelle gruppelov av høyde n, som er definert over $k_0=\mathbb{F}_p\subset\mathbb{F}_{p^n}$. Denne har p-rekke $[p]_{F_n}(z)=z^{p^n}$.

I dette tilfellet er Lubin–Tate ringen $LT(k,\Gamma)=\mathbb{W}\mathbb{F}_{p^n}[[u_1,\dots,u_{n-1}]]$. Her er $\mathbb{W}\mathbb{F}_{p^n}$ Witt ringen til $\mathbb{F}_{p^n}$, som er en uramifisert grad n utvidelse av $\mathbb{W}\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}_p$, dvs. ringen av p-adiske heltall. Gitt $\mathbb{Z}_p=\lim_n\mathbb{Z}/p^n$ kan $\mathbb{W}\mathbb{F}_{p^n}$ konstrueres ved å føye til en primitiv (p^n-1)-te rot av enheten.

Det maksimale idealet i $\mathbb{W}\mathbb{F}_{p^n}$ er $\mathfrak{m}=(p)$, med restkropp $\mathbb{F}_{p^n}$. Det maksimale idealet i $\mathbb{W}\mathbb{F}_{p^n}[[u_1,\dots,u_{n-1}]]$ er $\mathfrak{m}=(p,u_1,\dots,u_{n-1})$, også med restkropp $\mathbb{F}_{p^n}$. Dette er lokal-komplette ringer.

Definisjon. Gruppen $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{p^n},F_n)\subset\mathbb{F}_{p^n}[[z]]$ av automorfier av F_n definert over $\mathbb{F}_{p^n}$ kalles den n-te Morava stabilisatorgruppen $\mathbb{S}_n$. Dette er en profinitt gruppe. Lubin–Tate ringen

$$LT(\mathbb{F}_{p^n},F_n)=\mathbb{W}\mathbb{F}_{p^n}[[u_1,\dots,u_{n-1}]]$$

kalles kort E_{n0}. Galois-gruppen $C_n=\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ virker på $\mathbb{S}_n$ ved konjugasjon, og gruppen $\mathbb{G}_n=\mathbb{S}_n\rtimes C_n$ virker naturlig på E_{n0}.

Teorem (Dieudonné, Lubin). *La D_n være divisjonsalgebraen med senter $\mathbb{Q}_p$ og invariant $1/n$. Da er $\mathbb{S}_n$ isomorf med gruppen av enheter i det maksimale orden $\mathcal{O}_n$ i D_n.*

Eksempel. Med $n=1$ er Hondas høyde 1 formelle gruppelov $\Gamma=F_1$ gitt ved den multiplikative formelle gruppeloven $F_1(z_1,z_2)=z_1+z_2+z_1z_2$. Automorfiene av F_1 over $\mathbb{F}_p$ er de formelle potensrekkene $f(z)\in\mathbb{F}_p[[z]]$ med $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ og $f((1+z_1)(1+z_2)-1)=(1+f(z_1))(1+f(z_2)-1$. Dette er de p-adiske k-rekkene

$[k]_{F_1}(z) = (1+z)^k - 1 = \sum_{i\ge 1} \binom{k}{i} z^i$, med $p \nmid k$. Her er

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-i+1)}{i(i-1)\cdot \ldots \cdot 1}$$

definert for alle k. Derfor er $\mathbb{S}_1 = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p, F_1) \cong \mathbb{Z}_p^*$.

Lubin–Tate ringen er $LT(\mathbb{F}_p, F_1) = \mathbb{W}\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p = E_{10}$, og den universelt deformerte formelle gruppeloven F er lik den multiplikative formelle gruppeloven over $\mathbb{Z}_p$. Virkningen av $\mathbb{S}_1$ på $\mathbb{Z}_p$ er triviell, for hver k-rekke i $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p, F_1)$ virker som automorfier også på den universelle deformasjonen F, så hver ringhomomorfi $\phi\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ er identiteten.

Dette eksempelet vil senere realiseres som $E_{10} = \pi_0(E_1)$ av spekteret $E_1 = KU_p^\wedge$, med virkningen av de p-adiske Adams-operasjonene ψ^k på p-komplett topologisk K-teori.

Morava teoriene E_n

Den (ugraderte) universelt deformerte formelle gruppeloven F over $LT(\mathbb{F}_{p^n}, F_n)$ kan utvides til en grad -2 formell gruppelov over

$$E_{n*} = LT(\mathbb{F}_{p^n}, F_n)[u, u^{-1}] = \mathbb{W}\mathbb{F}_{p^n}[[u_1, \ldots, u_{n-1}]][u, u^{-1}]\,,$$

med u i grad 2. Med z_1, z_2 i grad -2 er uz_1, uz_2 i grad 0, og vi setter $F(z_1, z_2) = u^{-1}F(uz_1, uz_2) \in E_{n*}[[z_1, z_2]]$.

Ring-homomorfien $L = MU_* \to E_{n*}$ som klassifiserer F tar v_k til $u_k u^{p^k-1}$ for $0 \le k < n$, og til u^{p^n-1} for $k = n$. Det følger at E_{n*} er en Landweber eksakt MU_*-modul, og definerer en homologiteori $X \mapsto E_{n*}(X)$ og et spektrum E_n.

Gruppen $\mathbb{G}_n = \mathbb{S}_n \rtimes C_n$ virker som naturlige automorfier på $E_{n*}(X)$:

For et element $\bar{f} \in \mathbb{S}_n = \mathrm{Aut}(F_n)$ løfter til en ring-automorfi $\phi\colon E_{n0} \to E_{n0}$ med $\bar{\phi} = id$, og en isomorfi $gf^{-1}\colon F \to \phi_* F$. Da er det en naturlig automorfi

$$E_{n*} \otimes^F_{MU_*} MU_*(X) \xrightarrow[\cong]{\phi\otimes 1} E_{n*} \otimes^{\phi_* F}_{MU_*} MU_*(X) \xleftarrow[\cong]{(gf^{-1})^*} E_{n*} \otimes^F_{MU_*} MU_*(X)$$

av homologiteorien $E_{n*}(X)$, med visse modifikasjoner dersom gf^{-1} ikke er en strikt isomorfi.

Og et element $\sigma \in C_n = \mathrm{Gal}(k/k_0)$ løfter til en ring-automorfi $\psi\colon E_{n0} \to E_{n0}$ med $\bar{\psi} = \sigma$, og en $\star$-isomorfi $h\colon F \to \psi_* F$. Igjen er det en naturlig automorfi

$$E_{n*} \otimes^F_{MU_*} MU_*(X) \xrightarrow[\cong]{\psi\otimes 1} E_{n*} \otimes^{\psi_* F}_{MU_*} MU_*(X) \xleftarrow[\cong]{h^*} E_{n*} \otimes^F_{MU_*} MU_*(X)\,,$$

med modifikasjoner dersom h ikke er en strikt isomorfi.

Disse naturlige automorfiene er indusert av en virkning av $\mathbb{G}_n = \mathbb{S}_n \rtimes C_n$ på det representerende spekteret E_n, i den stabile kategorien.

Hopkins–Miller obstruksjonsteori

Hopkins og Miller konstruerte en obstruksjonsteori som kan vise at E_n er et A_∞ ringspektrum (for en passende A_∞ operad), og at virkningen av $\mathbb{G}_n$ på E_n kan løftes (diskret) til kategorien av A_∞ ringspektra. Goerss og Hopkins skriver ut en tilsvarende obstruksjonsteori i tilfellet for E_∞ ringspektra.

For endelige undergrupper $G \subset \mathbb{G}_n$ kan da homotopifikspunktene E_n^{hG} dannes, som A_∞- eller E_∞ ringspektra.

Proposisjon. *Morava stabilisator-gruppen* $\mathbb{S}_n$ *inneholder elementer av orden* p *hvis og bare hvis* $p-1 \mid n$.

Se [Ra86, 6.2.12].

Bevis-skisse. Elementene i $\mathbb{S}_n$ er inneholdt som enheter i det maksimale orden i divisjons-algebraen D_n, med senter $\mathbb{Q}_p$. Hvis $\zeta \in \mathbb{S}_n$ har orden p er den p-te syklotomiske kroppen $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ inneholdt i D_n. Da må graden $[Q_p(\zeta) : \mathbb{Q}_p] = p-1$ dele n. $\square$

Definisjon. Dersom p og n er slik at det finnes en maksimal endelig $G \subset \mathbb{G}_n$, entydig opp til konjugasjon, så defineres den $n$te høyere reelle K-teorien som $EO_n = E_n^{hG} = F(EG_+, E_n)^G$.

I tilfellet $n = 2$, $p = 2$ er divisjonsalgebraen D_2 lik de 2-adiske kvaternionene $\mathbb{Q}_2\{1, i, j, k\}$. Det maksimale orden $\mathcal{O}_2$ i D_2 er generert over $\mathbb{Z}_2$ av $1, i, j, k$ og $(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2$. Den maksimale endelige undergruppen av enhetsgruppen $\mathbb{S}_2$ i $\mathcal{O}_2$ er den binære tetrahedergruppen

$$A_4^* = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2}\}$$

av orden 24. Her er undergruppen $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ kvaternionegruppen av orden 8, og $A_4^* \cong Q_8 \rtimes C_3$ der en generator $\tau \in C_3$ virker på Q_8 ved å permutere (i, j, k) syklisk. Den maksimale endelige undergruppen av $\mathbb{G}_2$ er $G_{48} = A_4^* \rtimes C_2 \cong Q_8 \rtimes \Sigma_3$ av orden 48, og $EO_2 = E_2^{hG_{48}}$.

Devinatz og Hopkins viser hvordan også homotopifikspunktene for lukkede eller åpne undergrupper av $\mathbb{G}_n$ kan dannes. Morava's ringskifteteorem gir da en ekvivalens $E_n^{h\mathbb{G}_n} \simeq L_{K(n)}S$.

Elliptiske kurver på Weierstrass form

Elliptisk kurve Hopf algebroiden. La

$$C : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

være en plan kurve på Weierstrass form, definert over $A = \mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_6]$. Vi gir x, y vekt $2, 3$, og a_i vekt i.

Den kommutative ringen A korepresenterer kurver på Weierstrass form. Kurven C er ikke-singulær, og dermed en elliptisk kurve (med basispunkt $O = [0 : 1 : 0]$ ved ∞) dersom $\Delta \in A$ er invertibel [Si86, III.1.4]. Lokaliseringen $A[\Delta^{-1}]$ korepresenterer derfor elliptiske kurver på Weierstrass form.

En affin isomorfi av planet har formen

$$x = ax'' + by'' + c$$
$$y = dx'' + ey'' + f$$

med $ae \neq bd$. Den tar C til en kurve C'' på Weierstrass form hvis og bare hvis $b = 0$ og $e^2 = a^3 \neq 0$. Over en algebraisk lukket kropp kan vi da skrive $a = q^2$, $e = q^3$ for en passende $q \neq 0$. Den affine isomorfien er da sammensetningen av en strikt affin isomorfi

$$x = x' + c$$
$$y = a^{-1}dx' + y' + f$$

og en skalerende affin isomorfi

$$\begin{aligned} x' &= q^2 x'' \\ y' &= q^3 y'' \,. \end{aligned}$$

Gruppen av affine isomorfier som bevarer Weierstrass formen er derfor det semidirekte produktet av gruppen av strikte substitusjoner

$$(\dagger) \qquad \begin{aligned} x &= x' + r \\ y &= sx' + y' + t \end{aligned}$$

der r, s, t har vekt $2, 1, 3$, og gruppen av skalerende substitusjoner

$$(\ddagger) \qquad \begin{aligned} x &= q^2 x' \\ y &= q^3 y' \end{aligned}$$

der enheten q er har vekt 0. Den første gruppen kan oppfattes som Heisenberg-gruppen av strikt øvretriangulære matriser, med den affine virkningen

$$\begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y' \\ x' \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Den siste gruppen er den multiplikative gruppen $\mathbb{G}_m$.

Rang 3 Heisenberg-gruppen er korepresentert av den kommutative Hopf algebraen $\mathbb{Z}[r, s, t]$, med koprodukt $\Delta\colon \mathbb{Z}[r, s, t] \to \mathbb{Z}[r, s, t] \otimes \mathbb{Z}[r, s, t]$ gitt ved

$$\begin{aligned} \Delta(r) &= r \otimes 1 + 1 \otimes r \\ \Delta(s) &= s \otimes 1 + 1 \otimes s \\ \Delta(t) &= t \otimes 1 + s \otimes r + 1 \otimes t \end{aligned}$$

og konjugasjon χ gitt ved

$$\begin{aligned} \chi(r) &= -r \\ \chi(s) &= -s \\ \chi(t) &= rs - t \,. \end{aligned}$$

Den multiplikative gruppen er korepresentert ved Laurent-polynomene $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, med koprodukt $\Delta(q) = q \otimes 1 + 1 \otimes q$ og konjugasjon $\chi(q) = q^{-1}$.

Resultatet av substitusjonen (†) er kurven

$$C' : y'^2 + a_1' x' y' + a_3' y' = x'^3 + a_2' x'^2 + a_4' x' + a_6'$$

med koeffisienter [Si86, III.1.2]

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 + 2s \\ a_2' &= a_2 - sa_1 + 3r - s^2 \\ a_3' &= a_3 + ra_1 + 2t \\ a_4' &= a_4 - sa_3 + 2ra_2 - (rs + t)a_1 + 3r^2 - 2st \\ a_6' &= a_6 + ra_4 - ta_3 + r^2 a_2 - rta_1 + r^3 - t^2 \,. \end{aligned}$$

Tilsvarende er resultatet av substitusjonen (‡) en kurve C' der $a_i' = q^i a_i$ for alle i.

La $\Lambda = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[r, s, t] = A[r, s, t]$. Da er (A, Λ) en splitt Hopf algebroide. Venstre enheten $\eta_L\colon A \to \Lambda$ er den vanlige inklusjonen, høyre enheten $\eta_R\colon A \to \Lambda$ tar a_i til $a_i' \in \Lambda$ gitt ved formlene ovenfor, og koenheten ϵ tar r, s, t til 0. Koproduktet Δ og konjugasjonen χ er identiteten på A og gitt som ovenfor på $\mathbb{Z}[r, s, t]$.

Definisjon. Hopf algebroiden (A, Λ) kalles elliptisk kurve Hopf algebroiden.

Den kommutative ringen Λ korepresenterer mengden av strikte affine isomorfier mellom kurver på Weierstrass form, og paret (A, Λ) korepresenterer kategorien av slike plane kurver og affine isomorfier. Lokaliseringen $(A, \Lambda)[\Delta^{-1}]$ korepresenterer kategorien av elliptiske kurver på Weierstrass form og strikte affine isomorfier mellom slike. (Denne Hopf algebroiden er også splitt.)

Elliptiske modulære former. Kobar-komplekset til (A, Λ) begynner

$$A \xrightarrow{d^0} \Lambda \xrightarrow{d^1} \Lambda \otimes_A \Lambda \to \dots$$

med $d^0(a) = \eta_R(a) - \eta_L(a)$, så $H^0(A, \Lambda) = \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, A)$ består av elementene i A som er invariante under de strikte affine isomorfiene. Kobar-komplekset respekterer vektingen i (A, Λ), så hver gruppe $H^n(A, \Lambda)$ er vektet. Vi graderer en vektet gruppe ved å la elementer av vekt i ha grad $2i$. Et element i $H^0(A, \Lambda)$ har vekt i hvis og bare hvis det er en egenvektor med egenverdi q^i for substitusjonen (‡), for hver q.

Vi oppfatter elementene i A som regulære funksjoner på det affine rommet $\overline{\mathcal{W}} = \mathrm{Spec}\, A \cong \mathbb{A}^5_{\mathbb{Z}}$ av plane kurver gitt på Weierstrass form. (Elementene i $\mathbb{Z}[r, s, t]$ er regulære funksjoner på den affine Heisenberg-gruppen $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[r, s, t] \cong \mathbb{A}^3_{\mathbb{Z}}$.) Invariantene $mf_* = H^0(A, \Lambda) \subset A$ er de funksjonene på $\overline{\mathcal{W}}$ som bare avhenger av den strikte affine isomorfi-klassen til kurven, dvs. som kan oppfattes som en funksjon på moduli-rommet av strikte affine isomorfiklasser av slike kurver. Denne ringen kalles ringen av elliptiske modulære former.

Deligne og Tate har vist at $mf_* = \mathbb{Z}[c_4, c_6, \Delta]/(1728\Delta = c_4^3 - c_6^2)$, der c_4, c_6, Δ har vekt $4, 6, 12$. Merk at $1728 = 12^3 = 2^6 3^3$. Dersom vi lokaliserer vekk fra 2 og 3 er $mf_*[\frac{1}{6}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{6}][c_4, c_6]$.

Elementene i $A[\Delta^{-1}]$ oppfattes som regulære funksjoner på det åpne underrommet $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}\, A[\Delta^{-1}] \subset \mathrm{Spec}\, A = \overline{\mathcal{W}}$ av elliptiske kurver gitt på Weierstrass form. Invariantene $MF_* = H^0(A[\Delta^{-1}], \Lambda[\Delta^{-1}]) \cong mf_*[\Delta^{-1}]$ er da å oppfatte som funksjonene på moduli-rommet $\mathcal{M}_1 = \mathcal{W}/\cong$ av strikte affine isomorfiklasser av elliptiske kurver, som vi kan kalle ringen av elliptiske modulære funksjoner. Da er $MF_* = \mathbb{Z}[c_4, c_6, \Delta, \Delta^{-1}]/(12^3\Delta = c_4^3 - c_6^2)$.

Spørsmål: Hva er høyere kohomologi av (A, Λ) ? Er det E_2-leddet i en spektralsekvens ? Hva konvergerer denne mot ?

Svar: Topologiske modulære former.

Elliptisk formell gruppelov. Den elliptiske kurven C over $A[\Delta^{-1}]$ har en kanonisk definert gruppestruktur, med $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 = O$ hvis og bare hvis $\{P_1, P_2, P_3\}$ er de tre skjæringspunktene mellom C og en projektiv linje. Som lokal parameter (uniformizer) ved O bruker vi $z = -x/y$, og kurven er da grafen til $w = -1/y$ gitt som en funksjon

$$w = w(z) = z^3 + a_1 z^4 + (a_1^2 + a_2) z^5 + \dots$$

av z [Si86, IV.1]. Vi kan skrive $P = (z, w)$ med $w = w(z)$, for P nær O. Uttrykt ved hjelp av den lokale parameteren z er sumoperasjonen $P' = P_1 \oplus P_2$ gitt ved rasjonal funksjon, som tillater en formell potensrekkeutvikling

$$\begin{aligned} z' = F_C(z_1, z_2) &= z_1 + z_2 - a_1 z_1 z_2 - a_2(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2) \\ &\quad - (2a_3 z_1^3 z_2 - (a_1 a_2 - 3a_3) z_1^2 z_2^2 + 2a_3 z_1 z_2^3) + \dots \in A[[z_1, z_2]]\,. \end{aligned}$$

Dette er den elliptiske formelle gruppeloven F_C tilordnet C [Si86, IV.1].

Substitusjonen (†) leder til en ny lokal parameter $z' = -x'/y'$, med $z = (z' + rw')/(1 - (sz' + tw'))$. Vi har igjen en formell potensrekkeutvikling

$$z = f(z') = z' + sz'^2 + (r + s^2)z'^3 + (ra_1 + rs + s^3 + t)z'^4 \cdots \in \Lambda[[z']]$$

som definerer en strikt isomorfi $f\colon F_{C'} \to F_C$ mellom de elliptiske formelle gruppelovene tilhørende C og C'. Substitusjonen (‡) for q invertibel leder til $z = q^{-1}z'$, som definerer en (typisk ikke strikt) isomorfi mellom formelle gruppelover.

Den elliptiske formelle gruppeloven til Weierstrass-kurven C definert over A er klassifisert av en ringhomomorfi $\phi\colon L \to A$. De strikte affine isomorfiene, med tilhørende strikte isomorfier av formelle gruppelover over A er klassifisert av en ringhomomorfi $\psi\colon LB \to \Lambda$. Her er

$$\begin{aligned}\psi(b_1) &= s\\ \psi(b_2) &= r + s^2\\ \psi(b_3) &= ra_1 + rs + s^3 + t\,,\end{aligned}$$

etc. Sammen definerer disse en morfisme av Hopf algebroider $(L, LB) \to (A, \Lambda)$.

Supersingulær kurve

En supersingulær elliptisk kurve over en perfekt kropp k i karakteristikk p har høyde 2 formell gruppelov Γ [Si86, V.3.1]. Denne kan realiseres som en plan kurve i Weierstrass form. (Strikte) affine automorfier virker da (strikt) på den formelle gruppeloven.

For $p = 2$ er den supersingulære kurven $y^2 + y = x^3$. Med

$$k = \mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\rho]/(\rho^2 + \rho + 1) = \{0, 1, \rho, \rho^2\}$$

er gruppen av affine automorfier den binære tetrahedergruppen A_4^*. For en strikt substitusjon (†) bevarer kurven med $a_3 = 1$, $a_1 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$ dersom $r = s^2$, $s = r^2$ og $t = r^3 - t^2$, som har løsningene

$$\begin{aligned}(r, s, t) = (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, \rho), (1, 1, \rho^2),&\\ (\rho^2, \rho, \rho), (\rho^2, \rho, \rho^2), (\rho, \rho^2, \rho), (\rho, \rho^2, \rho^2).&\end{aligned}$$

En isomorfi med Q_8 tar $(1, 1, \rho^2)$ til i og (ρ^2, ρ, ρ^2) til j. En skalerende substitusjon (‡) bevarer kurven dersom $q^3 = 1$, så $q \in \mathbb{F}_4^* \cong C_3$. Da virker C_3 ved konjugasjon på Q_8, som i A_4^*.

Den maksimale endelige undergruppen av $\mathbb{G}_2$ er $G_{48} = A_4^* \rtimes C_2$. Per definisjon er $EO_2 = E_2^{hG_{48}} \cong (E_2^{hA_4^*})^{hC_2}$.

Lubin–Tate deformasjonsteori gir løftet formell gruppelov F over en komplett lokal ring $LT(k, \Gamma) \cong \mathbb{W}k[[\alpha]]$, og en Landweber eksakt Morava homologiteori $E_*(X)$ med koeffisienter $E_* = \mathbb{W}k[[\alpha]][u, u^{-1}]$. De affine automorfiene av kurven løfter til en virkning på $E_*(X)$, og til en virkning i den stabile kategorien på et representerende spektrum E.

Vi skal se at for $n = 2$ og $k = \mathbb{F}_{p^2}$ gir E en modell for Morava-spekteret E_2.

Deuring normalform

For $p = 2$ med $k = \mathbb{F}_4$ kan den universelt deformerte formelle gruppeloven realiseres som den elliptiske formelle gruppeloven til kurven $y^2 + \alpha uxy + u^3 y = x^3$ definert over $\mathbb{WF}_4[[\alpha]][u, u^{-1}]$. Når $u = 1$ er dette Deuring normalform for karakteristikk $\neq 3$. Gruppen A_4^* av affine automorfier virker løftet på E.

Hopkins og Mahowald ser at dette gir morfismer

$$(A, \Lambda) \to (\mathbb{Z}_2[[a_1]][a_3, a_3^{-1}], \Phi^\wedge) \to (E_{2*}, C^1(G_{48}; E_{2*}))$$

av Hopf algebroider, med $E_{2*} = \mathbb{WF}_4[[\alpha]][u, u^{-1}]$. Kobar-komplekset til høyre er kokjede-komplekset $C^*(G_{48}, E_{2*})$ for gruppe-kohomologi av $G_{48} = A_4^* \rtimes C_2$ med koeffisienter i E_{2*}. Den sammensatte morfismen induserer en isomorfi på kohomologi, etter at (A, Λ) er komplettert ved $(2, a_1)$ og Δ er invertert.

Gruppekohomologien $H^*(G_{48}, E_{2*})$ er E_2-leddet i homotopi-fikspunkt spektralsekvensen for $E_2^{hG_{48}}$. Så Hopf algebroide kohomologien av (A, Λ), med Δ invertert og komplettert ved $(2, a_1)$, er E_2-leddet i homotopi-fikspunkt spektralsekvensen for den høyere reelle K-teorien $EO_2 = E_2^{hG_{48}}$.

Vi ønsker nå å redegjøre for hvorfor EO_2 kan oppfattes som spekteret av topologiske modulære former, komplettert ved 2.

Elliptiske kurver på Deuring normalform

I karakteristikk $\neq 3$ er enhver elliptisk kurve C på Weierstrass form strikt affint isomorf med en kurve på Deuring normalform

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 ,$$

der $a_2 = a_4 = a_6 = 0$ [Si86, A.1.3]. La $D = \mathbb{Z}[a_1, a_3]$. Diskriminanten er $\Delta = (a_1^3 - 27a_3)a_3^3 \in D$.

De strikte affine substitusjonene (†) som bevarer Deuring normalformen må oppfylle $a_2' = a_4' = a_6' = 0$, som betyr at

$$(*) \qquad \begin{aligned} 3r &= sa_1 + s^2 \\ sa_3 &= -(rs + t)a_1 + 3r^2 - 2st \\ ta_3 &= -rta_1 + r^3 - t^2 . \end{aligned}$$

La $\Phi = D[r, s, t]/I$, der I er det tosidige idealet generert av disse relasjonene. Da er (D, Φ) en Hopf algebroide. Det er en morfisme av Hopf algebroider $\phi\colon (A, \Lambda) \to (D, \Phi)$, der surjeksjonen $\phi\colon A \to D$ sender a_2, a_4, a_6 til 0, som bestemmer strukturavbildningene i (D, Φ).

Vi skriver kort A' for lokaliseringen $A[\frac{1}{3}, \Delta^{-1}]$, og tilsvarende for andre A-moduler.

Proposisjon. *Lokalisert vekk fra* 3 *og* Δ *induserer* $\phi\colon (A, \Lambda) \to (D, \Phi)$ *en isomorfi*

$$\phi\colon H^*(A, \Lambda)' \xrightarrow{\cong} H^*(D, \Phi)' .$$

((Dersom Φ ikke er flat over D bør begge sider også kompletteres ved $(2, a_1)$.))

Bevis-skisse. Først sjekker vi hypotesene i [Ra86, A1.1.19]: Vi danner $\Lambda \otimes_A D \cong D[r,s,t]$. Den kanoniske avbildningen $\pi\colon D[r,s,t] \to \Phi$ er da surjektiv. Så danner vi $C = D[r,s,t]\Box_\Phi D$ som equalizeren av avbildningene

$$1 \otimes \eta_L, \eta_R \otimes \pi\colon D[r,s,t] \to D[r,s,t] \otimes_D \Phi\,.$$

Avbildningen $\phi \circ \eta_R\colon A \to A[r,s,t] \to D[r,s,t]$ løfter til en homomorfi $\psi\colon A \to C$. At enhver elliptisk kurve på Weierstrass form i karakteristikk $\neq 3$ er strikt affint isomorf med en kurve på Deuring normalform medfører at $\psi\colon A' \to C'$ er en isomorfi. Inklusjonen $C' \to D[r,s,t]'$ er da en D'-modul homomorfi, og er som sådan splitt ved en projeksjon som tar r,s,t til 0.

Så bruker vi ringskifte-isomorfiteoremet [Ra86, A1.3.12] på $(A',\Lambda') \to (D',\Phi')$, som gir en isomorfi

$$\mathrm{Ext}^*_{\Lambda'}(A',C') \cong \mathrm{Ext}^*_{\Phi'}(D',D') = H^*(D',\Phi')\,.$$

Her er C' lokaliseringen av $C = (\Lambda \otimes_A D)\Box_\Phi D$, som ovenfor. Isomorfien $\psi\colon A' \to C'$ gir resultatet, siden

$$H^*(A',\Lambda') = \mathrm{Ext}^*_{\Lambda'}(A',A') \cong \mathrm{Ext}^*_{\Lambda'}(A',C')\,.$$

□

$H^*(A,\Lambda)$ har endelig type, så vi mister ingen p-lokal informasjon ved å komplettere ved et primtall p. Heretter konsentrerer vi oss om 2-lokal informasjon.

For å identifisere lokaliseringen (D',Φ') må vi løse likningene $(*)$. Dette er i allmennhet vanskelig, men er enkelt modulo idealet $(2,a_1)$, og lar seg gjøre etter komplettering ved dette idealet. Modulo $(2,a_1)$ søker vi løsninger til likningene

$$(**)\qquad \begin{aligned} r &= s^2 \\ sa_3 &= r^2 \\ ta_3 &= r^3 + t^2 \end{aligned}$$

over $D'/(2,a_1) = \mathbb{F}_2[a_3][\Delta^{-1}] = \mathbb{F}_2[a_3,a_3^{-1}]$. Dette er koeffisientringen $K(2)_* = \mathbb{F}_2[v_2,v_2^{-1}]$ til Morava K-teorien $K(2)$ ved $p=2$.

Likningene gir $s^4 = sa_3$, så $s=0$ eller $s^3 = a_3$. Vi innfører en tredjerot u av a_3 og en tredjerot ρ av enheten. Da er $s \in \{0,u,\rho u,\rho^2 u\}$. For $s=0$ er $r=0$ og $ta_3 = t^2$ gir $t \in \{0,u^3\}$. For $s \in \{u,\rho u,\rho^2 u\}$ er $r^3 = u^6 = a_3^2$ og $t^2 + ta_3 + a_3^2 = 0$, som gir $t \in \{\rho u^3, \rho^2 u^3\}$. Vi finner 8 løsninger i $\mathbb{F}_4[u,u^{-1}]$, der $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\rho]/(\rho^2+\rho+1) = \{0,1,\rho,\rho^2\}$, nemlig:

$$\begin{aligned}(r,s,t) = (0,0,0),(0,0,u^3),(u^2,u,\rho u^3),(u^2,u,\rho^2u^3),\\ (\rho^2u^2,\rho u,\rho u^3),(\rho^2u^2,\rho u,\rho^2u^3),(\rho u^2,\rho^2 u,\rho u^3),(\rho u^2,\rho^2 u,\rho^2 u^3).\end{aligned}$$

Oppfattet som undergruppe av Heisenberg-gruppen over $\mathbb{F}_4[u,u^{-1}]$ danner disse en gruppe isomorf med gruppen $Q_8 = \{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$ av kvaternioniske enheter.

Vi ledes derfor til å utvide D' med en tredjerot u av a_3, av vekt 1, og en primitiv tredjerot ρ av enheten, av vekt 0, og å komplettere ved idealet $(2,a_1)$. La $E = \pi_*(E_2)$ være resultatet.

I D er diskriminanten $\Delta = (a_1^3 - 27a_3)a_3^3$, så a_3 er invertert i D'. Omvendt er også Δ invertert i $D[a_3^{-1}]^\wedge_{(2,a_1)}$, ved formelen

$$\Delta^{-1} = -\frac{1}{27a_3^4}\sum_{n=0}^{\infty}(a_1^3/27a_3)^n\,.$$

Vi skriver $\mathbb{WF}_4 = \mathbb{Z}_2[\rho]/(\rho^2+\rho+1)$ for Witt ringen til $\mathbb{F}_4$, som er den uramifiserte kvadratiske utvidelsen av $\mathbb{WF}_2 = \mathbb{Z}_2$. Da er $E = \mathbb{WF}_4[[a_1]][a_3, a_3^{-1}][u]/(u^3 = a_3)$. Vi skriver $a_1 = \alpha u$ med α i vekt 0, og får $B = \mathbb{WF}_4[[\alpha]][u, u^{-1}]$. Dette er koeffisientringen E_{2*} til Morava-teorien E_2 ved $p = 2$. Kurven har nå likningen

$$y^2 + \alpha uxy + u^3y = x^3$$

på Deuring normalform over E.

Vi lar $\Psi = E \otimes_D \Phi = E[r,s,t]/I$, der I er det tosidige idealet generert av relasjonene $(*)$ med $a_1 = \alpha u$ og $a_3 = u^3$. Igjen er (E, Ψ) en Hopf algebroide.

Løsningene (r,s,t) i $E/(2,a_1) = \mathbb{F}_4[u,u^{-1}]$ til $(**)$ kan oppfattes som mengden av E-algebra homomorfier $\Psi \to E/(2,a_1)$. Bijeksjonen $Q_8 \cong \mathrm{Hom}_E(\Psi, E/(2,a_1))$ er adjungert til en homomorfi $\Psi \to C^1(Q_8; E/(2,a_1))$. Vi ønsker å løfte denne til en isomorfi $\Psi \to C^1(Q_8; E)$.

Lemma. *Hver løsning (r,s,t) til $(**)$ i $E/(2,a_1)$ har en entydig løftning som en løsning til $(*)$ i E. Det er en bijeksjon $Q_8 \cong \mathrm{Hom}_E(\Psi, E)$.*

Bevis-skisse. Dette er en anvendelse av Hensels lemma. Gitt en løsning (r_0, s_0, t_0) til $(*)$ modulo $(2, a_1)$, substitueres denne inn i høyre-siden av $(*)$. (Koeffisientene 3 og a_3 er nå invertible.) Dette gir en ny tilnærmet løsning (r_1, s_1, t_1) til $(*)$ modulo en ekte høyere potens av $(2, a_1)$. Ved gjentatt substitusjon i $(*)$ fås en sekvens av stadig bedre tilnærmede løsninger (r_n, s_n, t_n), som i grensen gir den løftede løsningen (r,s,t) i E. Entydighet følger likedan. $\square$

Orden 2 elementet $-1 \in Q_8$ svarer til $(r,s,t) = (0,0,a_3)$ i $\mathbb{F}_2[a_3, a_3^{-1}]$, og løfter til $(r,s,t) = (0, -a_1, -a_3)$ i $\mathbb{Z}_2[[a_1]][a_3, a_3^{-1}]$. Løftningene av orden 4 elementene i Q_8 er mer kompliserte.

Proposisjon. *Det er en isomorfi av Hopf algebroider $(E, \Psi) \cong (E, C^1(Q_8; E))$, der Q_8 virker på $E = \mathbb{WF}_4[[\alpha]][u, u^{-1}]$ ved*

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto \eta_R(a_1) = a_1 + 2s \\ a_3 &\mapsto \eta_R(a_3) = a_3 + ra_1 + 2t\,. \end{aligned}$$

Det er en isomorfi $H^*(E, \Psi) \cong H^*(Q_8; E)$.

Bevis-skisse. Et element i Q_8 svarer til en løsning (r,s,t) til $(*)$ i E. Virkningen av dette elementet avbilder E til E slik at a_1 tas til $a_1 + 2s$ og a_3 tas til $a_3 + ra_1 + 2t$. Isomorfien $\Psi \cong C^1(Q_8; E)$ er adjungert til bijeksjonen $Q_8 \cong \mathrm{Hom}_E(\Psi, E)$. Kobar-komplekset til (E, Ψ) er derfor isomorft med kobar-komplekset til $(E, C^1(Q_8; E))$, som igjen er isomorft med komplekset $C^*(Q_8; E)$ som beregner gruppekohomologien $H^*(Q_8; E)$. $\square$

Den sykliske gruppen $C_3 = \{e, \tau, \tau^2\}$ virker på $E \subset \Psi$ ved $\tau(u) = \rho u$ og $\tau(\alpha) = \rho^{-1}u$. Virkningen lar $a_1 = \alpha u$ og $a_3 = u^3$ være invariante. Den sykliske gruppen

$C_2 = \{e, \sigma\}$ virker på $\mathbb{WF}_4 \subset E \subset \Psi$ ved $\sigma(\rho) = \rho^2$. Virkningen på $\mathbb{WF}_4$ løfter Frobenius-operatoren $\sigma \colon z \mapsto z^2$, som genererer $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2) = C_2$.

Sammen genererer C_3 og C_2 permutasjonsgruppen $\Sigma_3 = C_3 \rtimes C_2$, der $\sigma\tau\sigma = \tau^2$, og Σ_3 virker på E med invariant-ring $E^{\Sigma_3} = \mathbb{Z}_2[[a_1]][a_3, a_3^{-1}]$. Vi skriver kort $D^\wedge = E^{\Sigma_3} = (D')^\wedge_{(2,a_1)}$ og $\Phi^\wedge = \Psi^{\Sigma_3} = D^\wedge \otimes_{D'} \Phi'$.

Abstrakt er den binære tetrahedergruppen det semi-direkte produktet $A_4^* \cong Q_8 \rtimes C_3$, der $\tau \in C_3$ virker på $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ved å permutere (i, j, k) syklisk. Også som affine isomorfier virker den skalerende substitusjonen (‡) med $q = \rho$ ved konjugasjon på de strikte substitusjonene gitt ved (†), og tar i representert ved $(u^2, u, \rho^2 u^3)$ til j representert ved $(\rho^2 u^2, \rho u, \rho^2 u^3)$, og videre til $ij = k$ representert ved $(\rho u^2, \rho^2 u, \rho^2 u^3)$.

Altså er virkningen av $A_4^* = Q_8 \rtimes C_3$ på E kompatibel med virkningen av de affine isomorfiene til kurven $y^2 + y = x^3$ over $\mathbb{F}_4$.

Lemma. *$H^*(E^{C_3}, \Psi^{C_3}) \cong H^*(E, \Psi)^{C_3} \cong H^*(Q_8; E)^{C_3} \cong H^*(A_4^*; E)$.*

Galois-virkningen ved $C_2 = \{e, \sigma\}$ står igjen. Påstanden er at E^{C_3}, Ψ^{C_3} og A_4^*-modulen E over $\mathbb{WF}_4$ er indusert opp over den uramifiserte utvidelsen $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{WF}_4$, slik at det ikke forekommer noen høyere C_2-gruppekohomologigrupper.

Proposisjon. *$H^*(D^\wedge, \Phi^\wedge) = H^*(E^{\Sigma_3}, \Psi^{\Sigma_3}) \cong H^*(A_4^* \rtimes C_2; E) = H^*(G_{48}; E)$.*

Teorem (Hopkins–Mahowald). *Det er en isomorfi*

$$H^*(A, \Lambda)[\Delta^{-1}]^\wedge_{(2,a_1)} \cong H^*(G_{48}; E)$$

der (A, Λ) er elliptisk kurve Hopf algebroiden, $G_{48} = A_4^* \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2) \cong Q_8 \rtimes \Sigma_3$ og $E = \mathbb{WF}_4[[\alpha]][u, u^{-1}]$

Samtidig er $E = \pi_*(E_2)$ koeffisientringen til Morava-teorien gitt ved den universelle Lubin–Tate deformasjonen av en høyde 2 formell gruppelov over $\mathbb{F}_4$, oppfattet som Landweber eksakt MU_*-modul via Lazards og Quillens teoremer. Ved Hopkins–Miller teori virker G_{48} på E_2 gjennom E_∞ ringspektrum-avbildninger, og vi kan danne homotopifikspunkt-spekteret $EO_2 = E_2^{hG_{48}}$.

Homotopifikspunkt-spektralsekvensen

$$E_2^{s,t} = H^{-s}(G_{48}; \pi_t(E_2)) \Longrightarrow \pi_{s+t}(EO_2)$$

kalles også Adams–Novikov spektralsekvensen for EO_2.

Korollar (Hopkins–Mahowald). *E_2-leddet i Adams–Novikov spektralsekvensen for EO_2 er kohomologien av elliptisk kurve Hopf algebroiden (A, Λ) med Δ invertert og komplettert ved $(2, a_1)$.*

Kant-homomorfien i spektralsekvensen er homomorfien

$$\pi_*(EO_n) \to H^0(G_{48}; \pi_*(E_2)) \cong (MF_*)^\wedge_{(2,a_1)}$$

fra ringen $TMF_* = \pi_*(EO_2)$ av topologiske modulære funksjoner til kompletteringen av ringen MF_* av (elliptiske) modulære funksjoner over $\mathbb{Z}$. De høyere kohomologi-gruppene $H^n(G_{48}; \pi_*(E_2))$ er 2-torsjon, og dette er en rasjonal ekvivalens.

Vi oppfatter dette som en basisskifte-homomorfi, fra grunnringen S (sfærespekteret) til grunnringen $\mathbb{Z}$ (de hele tallene).

Referanse: [HM98].

Adams–Novikov spektralsekvensen

Hopkins og Mahowald beregner også den høyere kohomologien $H^*(A, \Lambda)$. Dette bestemmer E_2-leddet i Adams–Novikov spektralsekvensen for $\pi_*(EO_2)$. Med unntak av en summand $ko_*[v_2^4, v_2^{-4}]\{v_1^4\}$ er dette vist i Tabell 1, som er hentet fra [HM98]. Her er også differensialene vist, og klasser som ikke overlever til E_∞ er tegnet i grått. Klassen Δ^8 i grad 192 overlever til E_∞, som bildet av v_2^{32} i Adams–Novikov spektralsekvensen for $\pi_*(S)$, så homotopien $\pi_*(EO_2)$ er 192-periodisk.

Adams spektralsekvensen

Hopkins og Miller konstruerer også et (2-komplett) konnektivt spektrum eo_2, med $H^*(eo_2; \mathbb{F}_2) \cong A \otimes_{A_2} \mathbb{F}_2$ som modul over Steenrod algebraen A. Her er $A_2 \subset A$ underalgebraen generert av Sq^1, Sq^2 og Sq^4. Avbildningen $\pi_*(eo_2) \to \pi_*(EO_2)$ inverterer Δ^8.

Adams spektralsekvensen for $\pi_*(eo_2)$ har E_2-ledd

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(A \otimes_{A_2} \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Ext}_{A_2}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \Longrightarrow \pi_{t-s}(eo_2)\,.$$

Disse Ext-gruppene ble beregnet av Iwai og Shimada, og er vist i Tabell 2. Hopkins og Mahowald beregner differensialene i denne spektralsekvensen, og finner dermed $\pi_*(eo_2)$. Disse gruppene er v_2^{32}-periodiske.

References

[Ad74] J.F. Adams, *Stable homotopy and generalised homology*, Chicago Lectures in Mathematics, vol. 10, The University of Chicago Press, 1974.

[HM98] M. Hopkins and M. Mahowald, *From elliptic curves to homotopy theory*, preprint (1998).

[Ra86] D.C. Ravenel, *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres*, Academic Press, Inc, 1986.

[Ra92] D.C. Ravenel, *Nilpotence and Periodicity in Stable Homotopy Theory*, Ann. of Math. Study, vol. 128, Princeton University Press, 1992.

[Re98] C. Rezk, *Notes on the Hopkins-Miller theorem*, Homotopy theory via algebraic geometry and group representations. (Mahowald, Mark et al., eds.), Contemp. Math., vol. 220, American Mathematical Society, 1998, pp. 313-366.

[Si86] J.H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Maths., vol. 106, Springer, 1986.

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo