Antoine Pauthier

né le 26 janvier 1989

University of Minnesota Twin Cities
School of Mathematics
apauthie@umn.edu
http://www-users.math.umn.edu/∼apauthie/

Parcours professionnel

2016 – 2019 **Dunham Jackson Assistant Professor**,
University of Minnesota, Minneapolis.Position postdoctorale avec enseignement.

2013 – 2016 **Doctorant contractuel**,
Université de Toulouse.

Thèse de doctorat

- Titre : Deux exemples de propagation de fronts pour des équations de réaction-diffusion en milieu hétérogène.
- Directeurs : Henri Berestycki et Jean-Michel Roquejoffre.
- Soutenue le 20 juin 2016.
- Rapporteurs : Alexander Kiselev (Duke) et Enrico Valdinoci (Université de Melbourne).
- Composition du jury : Henri Berestycki, Laurent Desvillettes, Marie Doumic-Jauffret, Alexander Kiselev, Sepideh Mirrahimi, Jean-Michel Roquejoffre, Enrico Valdinoci.

Formation

2009 – 2013 **Étudiant à l'École Normale Supérieure de Cachan**.

2013 **Master 2 de Mathématiques pures et appliquées**,
parcours Équations aux dérivées partielles,
Université de Toulouse.

2012 **Agrégation de mathématiques**,
option Calcul scientifique. Rang : 57^{eme}.

2009 – 2011 **Licence 3 puis Master 1 de mathématiques**,
École Normale Spérieure de Cachan, Université Paris Diderot.

Précédents stages de recherche

2011 **Stage de M1**, 5 mois, Commissariat à l'Énergie Atomique, Ile-de-France,
solutions stationnaires pour les équations d'Euler radiatives 1D.
– Dirigé par P. Hoch, B. Rebourcet et G. Samba.

2010 **Stage de L3**, 5 mois, Centre de mathématiques de de leurs applications, Cachan,
Stabilisation d'une équation des ondes 1D avec une commande bilinéaire.
– Dirigé par Karine Beauchard.

Publications et préprints

Tous les preprints sous disponibles sur ArXiv.

- *Large-time behavior of solutions of parabolic equations on the real line with convergent initial data. Part II: same limits at infinity*, avec Peter Poláčik, en préparation.
- *Large-time behavior of solutions of parabolic equations on the real line with convergent initial data*, avec Peter Poláčik, Nonlinearity 31 (2018), 4423-4441.

- *Entire solutionsin cylinder-like domains for a bistable reaction-diffusion equation*, à paraître dans J. Dynam. Differential Equations, 2017.
- *The influence of a line with fast diffusion and nonlocal exchange terms on Fisher-KPP propagation*, Comm. Math. Sciences, 2015 2 (2016) 535-570.
- *Uniform dynamics for Fisher-KPP propagation driven by a line of fast diffusion under a singular limit*, Nonlinearity 28 (2015) 3891-3920.
- *Road-field reaction-diffusion system: a new threshold for long range exchanges*, une courte note concernant l'infemum de la vitesse de propagation pour le système étudié dans les papiers ci-dessus, 2015.

Exposés

2018	**Séminaire dynamique des populations** Université de Bordeaux	Bordeaux.
2016	**PDE seminar** School of Mathematics, University of Minnesota	Minneapolis.
2015	**Séminaire de l'équipe BioSP**	INRA, Avignon.
2014 – 2018	Exposés lors des rencontres ANR Nonlocal et ERC ReaDi	Paris, Avignon, Porquerolles.

Enseignement

Enseignement en tant que Dunham Jackson Assistant Professor à l'Université du Minnesota

Depuis septembre 2016 j'enseigne à l'Université du Minnesota, à Minneapolis. Ma charge d'enseignement est similaire à celle d'un *assistant professor* dans une université publique, un cours un semestre, deux cours l'autre semestre. En plus de la présence devant les élèves, les enseignants sont tenus de proposer un volume horaire équivalent d'*office hours* durant lesquelles les étudiants peuvent venir sans rendez-vous pour poser des questions. Chaque semestre dure 16 semaines, un cours demande trois ou quatre heures par semaine de cours magistral. L'enseignement aux États-Unis est assez différent de ce que j'ai pu connaître en France. Les cours ne sont pas ou peu différenciés selon les filières, chacun est libre de s'inscrire si les prérequis sont validés, ce qui donne des profils parfois très hétérogènes. Cette diversité nécessite une adaptation constante du discours, entre étudiants consommateurs de mathématiques algorithmiques qu'ils pourront directement appliquer d'un côté et étudiants intéressés par les concepts mathématiques de l'autre. J'ai donc dû et su m'adapter à des étudiants aux attentes diverses, à des méthodes d'enseignements beaucoup plus portées sur la valorisation et l'accessibilité, tout en maintenant un enseignement de haut niveau.

La charge d'enseignement est répartie non pas en nombre d'heures mais en cours à donner sur un semestre ; cette répartition permet un suivi des élèves et de l'enseignement sur une durée raisonnable, suivi renforcé par la pratique des office hours. Je détaille ci-après mes enseignements.

- *Fall 2018 : Applied Linear Algebra,* deux sections (22 et 34 étudiants), trois heures par semaine et par section de cours magistral. Ce cours est destiné à des étudiants généralement en troisième ou quatrième année, avec des profils relativement spécialisés : *majors* en mathématiques, informatique, statistiques, physique, ... Il recouvre la théorie générale de l'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$ en dimension finie : systèmes linéaires, espaces vectoriels, bases, applications linéaires, matrices, déterminants, valeurs propres et réduction, orthogonalité, formes quadratiques, et quelques applications. Pour ce cours, je suis libre dans mon choix du programme comme de la notation.
- *Spring 2018 : Applied Linear Algebra,* deux sections (39 et 35 étudiants).
- *Fall 2017 : Multivarialble Calculus,* une section (32 étudiants), quatre heures par semaine de cours magistral. Ce cours s'adresse en général à des étudiants en deuxième ou troisième année venant de tous horizons (*majors* en économie, chimie, informatique, physique, ...). Il comprend les bases du calcul différentiel avec un fort accent sur les intégrales multiples, allant jusqu'aux théorèmes de Green, Stokes, et Gauss. Je donnais un cours du soir, d'où un format un peu spécifique avec peu d'étudiants pour un cours de ce niveau, plus d'heures d'enseignement durant lesquelles une partie était consacrée au cours, une autre à des exercices. Le programme devait suivre grossièrement celui des cours "en amphi" correspondants, l'examen final étant commun.

- *Spring 2017 : Linear Algebra and Differential Equations,* deux sections (105 et 118 étudiants), deux heures par semaine et par section de cours magistral. Ce cours était réservé aux étudiants du *College of Science and engineering,* généralement en deuxième année, d'où une charge réduite, les étudiants ayant plus d'heures de pratique sur machine. Il regroupe les bases de l'algèbre linéaire et de l'étude des équations différentielles linéaires : réduction de Gauss-Jordan pour les systèmes linéaires, matrices, notion de déterminant, valeurs propres et réduction en dimensions 2 et 3, applications aux equations différentielles linéaires, transformée de Laplace pour résoudre des équations différentielles linéaires. Pour chaque section, il y avait quatre *teaching assistants* (généralement étudiants en master ou en études doctorales) qui assuraient les parties TD/TP. J'étais en charge de deux amphis sur quatre, au sein d'une équipe de trois professeurs et une quinzaine de *teaching assistants*, avec trois partiels et un examen communs, nécessitant une collaboration permanente entre membres de l'équipe pédagogique.
- *Fall 2016 : Multivariable calculus,* une section (32 étudiants), quatre heures par semaine de cours magistral. Format similaire à celui décrit ci-dessus.

Enseignement en tant que doctorant contractuel à l'Université de Toulouse

Ma charge d'enseignement était celle d'un doctorant contractuel chargé d'enseignement en France, 64 heures équivalent TD par an. J'ai effectué la majeure partie de mon enseignement auprès des L2 Préparation aux concours Polytechniques (PCP), filière qui permet d'accéder aux écoles d'ingénieurs de la banque ENSI via un concours spécifique. Le programme est basé sur celui celui des filières PC - PSI en classes préparatoires.

- 2013–2014 L2 PCP. Travaux dirigés (64h).
  Sujets : courbes paramétriques, topologie en dimension finie, calcul différentiel, intégrales multiples.
- 2014–2015 L2 PCP. Travaux dirigés (72h).
  Sujets : suites et séries, intégrales généralisées, suites et séries de fonctions, séries entières, matrices et applications linéaires.
- 2015–2016
  - L2 PCP. Travaux dirigés (44h).
    Sujets : suites et séries, intégrales généralisées, suites et séries de fonctions, séries entières
  - L2 parcours spécial, étudiants avec spécialisations en mathématiques, physiques, chimie. Travaux dirigés (12h).
    Sujets : suites et séries de fonctions.

Autres exprériences d'enseignement

- Encadrement de deux stages Hippocampe dans le cadre de la formation doctorale à l'Institut de Mathématiques de Toulouse. Les stages Hippocampe sont des stage de trois jours pour des élèves de lycées dans le but de leur faire découvrir la recherche. L'idée est de les faire travailler sur des sujets nouveaux pour eux avec le minimum de connaissances initiales. Au bout des trois jours ils présentent leurs résultats à l'ensemble de la classe, puis au cours d'une session poster aux membres du laboratoire.
  Sujets : trajet optimal, modélisation statistique des crues.
- Interrogations orales (colles). Durant l'année 2011-2012 j'ai été examinateur (2 colles/semaine) en MPSI au lycée Saint-Louis (Paris).

Responsabilités collectives

2014 – 2016	Co-organisateur du séminaire des doctorants Séminaire bi-mensuel à l'Institut de Mathémathiques de Toulouse.
2014 – 2015	Co-organisateur d'un groupe de travail GdT mensuel couvrant EDO stochastiques, mécanique des fluides réaction-diffusion.
2015 – 2016	Membre élu du conseil de laboratoire de l'Institut de Mathémathiques de Toulouse représentant des doctorants.

1 Travaux de recherche

1.1 Travaux de thèse

Mes travaux de thèse portent sur certains types d'équations de réaction-diffusion en milieux hétérogènes. Leur étude revêt une importance particulière dans la modélisation et l'étude mathématique de nombreux phénomènes biologiques. Ce sujet s'inscrit dans le cadre du projet ERC ReaDi, projet porté par Henri Berestycki et Jean-Michel Roquejoffre, respectivement PI et co-PI du projet, ainsi que dans le projet de l'ANR Nonlocal, portée par François Hamel et Henri Berestycki.

Les équations de réaction-diffusion de la forme

$$\partial_t u - d\Delta u = f(u), \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{R}^+) \tag{1}$$

ont été introduites par Kolmogorov, Petrovsky et Piskounov en 1937. Depuis, les phenomènes de type propagation, vitesse d'invasion, ou existence de fronts sont relativement bien connus en milieu homogène. Ma thèse s'articule autour de l'étude de tels phénomènes en milieux hétérogènes. Les hétérogénéités peuvent être dans le terme de réaction, le phénomène diffusif, ou encore dans le domaine. Mes travaux de thèse s'attachent à l'étude d'exemples de fronts de propagations en présence d'une ou plusieurs de ces hétérogénéités.

Influence d'une ligne de diffusion rapide avec échanges non locaux sur une propagation de type Fisher-KPP

Le but de la première partie est d'étudier les effets d'interactions non locales dans un certain type de système d'équations paraboliques couplées. On s'intéresse au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_{xx} u = -\overline{\mu} u + \int \nu(y) v(t,x,y)dy & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \partial_t v - d\Delta v = f(v) + \mu(y)u(t,x) - \nu(y)v(t,x,y) & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ce type de modèle a été introduit par Berestycki, Roquejoffre, et Rossi en 2013. L'objectif initial était de proposer un cadre mathématique permettant de comprendre l'influence de réseaux de transports sur les invasions biologiques. Il est avéré, par exemple, que les grandes pandémies comme la peste noire se sont propagées en Europe le long des routes commerciales. Plus récemment, on a pu constater que des parasites se déplacent le long des fleuves (e.g. infection des aulnes en Bavière) ou via les réseaux routiers (e.g. moustique tigre en France).

Un environnement bidimensionnel (le plan $\mathbb{R}^2$, appelé le champ en référence aux situations biologiques) inclus une ligne de forte diffusion (la droite $\{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$, appelée la route). La quantité v, définie dans le champ, suit une équation de réaction-diffusion usuelle de type logistique, dont l'archétype est $f(v) = v - v^2$, tandis qu'un phénomène de diffusion simple a lieu sur la route. On note d la diffusivité dans le champ, D celle sur la route. Les interactions entre la route et le champ sont définies par deux fonctions d'échanges positives μ et ν, avec la notation $\overline{\mu} = \int_{\mathbb{R}} \mu$, $\overline{\nu} = \int_{\mathbb{R}} \nu$. Cela donne lieu à des interactions non locales entre les deux équations du système. Les interactions sont définies afin que le système préserve la masse totale en l'absence de terme de réaction. Dans le cas de fonctions d'échanges dégénérées en masses de Dirac $\mu = \overline{\mu}\delta_{y=0}$, $\nu = \overline{\nu}\delta_{y=0}$, le système (2) peut être vu, au moins sur le plan formel, comme un système avec intéractions localisées données par des conditions de bords de type Robin. Ce type de couplage par conditions de bords fut le point de départ du programme, étudié initialement par Berestycki, Roquejoffre, et Rossi. Ils proposent en 2013 un modèle dans lequel la route est la frontière du champs, et les interactions sont localisées au niveau de cette frontière par de telles conditions de Robin. Si la diffusion sur la route D est plus forte que la diffusion dans le champs d, il est raisonnable de s'attendre à ce que la présence de la route accélère la propagation dans la direction de celle-ci (selon l'axe x). Le premier résultat obtenu par Berestycki, Roquejoffre et Rossi est qu'une telle accélération a lieu si et seulement si $D > 2d$, seuil critique dans le cas d'échanges localisés pour que la route influence la propagation.

La problématique initiale de ma thèse était alors d'analyser l'influence d'échanges non localisés, alors encore non étudiés dans ce cadre, sur la dynamique. Sous certaines hypothèses techniques sur les fonctions d'échanges ν et μ le théorème suivant :

Théorème 1. *Il existe c^* dépendant de tous les paramètres du système tel que, si (u,v) est une solution de (2) partant d'une donnée initiale positive à support compact, on a :*

- *pour tout $c > c^*$, $\lim_{t\to\infty} \sup_{|x|\geq ct} (u(x,t), v(x,y,t)) = (0,0)$;*
- *pour tout $c < c^*$, $\lim_{t\to\infty} \sup_{|x|\leq ct} ((u(x,t), v(x,y,t)) - (U_s, V_s(y))) = (0,0)$ où $(U_s, V_s(y))$ est l'unique solution stationnaire non nulle positive et bornée de (2).*

- *Si $D \leq 2d$, alors $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$. Si $D > 2d$, Alors $c^* > c_{KPP}$.*

C'est un résultat de propagation typique : l'invasion a lieu, dans la direction de la route, asymptotiquement à la vitesse c^*. Ce résultat est similaire à ceux du modèle initial. Cela peut surprendre, il est étonnant de retrouver le même seuil $D = 2d$ pour obtenir une accélération. Cela permet de montrer la robustesse du modèle initial comme de la méthode, et motive l'étude de propriétés spécifiques d'un tel modèle, particulièrement comment la vitesse de propagation est liée à celle du modèle initial. Il est alors naturel de considérer les masses d'échanges $\overline{\mu}$ et $\overline{\nu}$ comme des paramètres fixés et de voir comment la vitesse de propagation était affectée par la répartition des fonctions d'échanges. Une première approche est de regarder ces variations avec un seul échange non local ν ou μ, le second étant fixe et local. Les résultats sont alors les suivants.

- Si l'échange ν est une masse de Dirac ($\nu = \overline{\nu}\delta_{y=0}$), alors la vitesse d'invasion c^*, dépendant de la répartition de μ, est maximale pour un échange local.

- Si l'échange μ est une masse de Dirac, en considérant des échanges auto-similaires pour ν de la forme $\nu_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\nu\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, alors la masse de Dirac est un minimum local pour la vitesse d'invasion.

- Ce résultat ne se généralise à l'ensemble des approximations d'une masse de Dirac. En considérant des échanges de la forme
$$\nu(y) = (1-\varepsilon)\delta_0 + \varepsilon\upsilon(y) \tag{3}$$
où υ est une fonction positive à support compact de masse 1, on a peut exhiber des paramètres et fonctions d'échanges tels que la masse de Dirac soit un minimum ou un maximum local.

Ces résultats montrent une différence marquée dans le comportement de la vitesse d'invasion entre des échanges auto-similaires et des approximations d'une masse de Dirac plus variées.

Ces résultats s'intéressent à une maximisation de la vitesse d'invasion. Une autre partie de ma thèse est consacrée à la minimisation de la vitesse d'invasion. On montre que, à paramètres fixés, des suites minimisantes sont données par des fonctions d'échanges évanescentes dans chaque cas de la forme $\mu_R(y) = \frac{1}{R}\mu\left(\frac{y}{R}\right)$ ou $\nu_R(y) = \frac{1}{R}\nu\left(\frac{y}{R}\right)$ avec $R \to \infty$. De plus, le minimum pour la vitesse d'invasion asymptotique satisfait :

- si $D \in \left[2d, d\left(2 + \dfrac{\overline{\mu}}{f'(0)}\right)\right]$, $\inf c^* = 2\sqrt{df'(0)}$;

- Pour $D > d\left(2 + \dfrac{\overline{\mu}}{f'(0)}\right)$, alors $\inf c^* > 2\sqrt{df'(0)}$.

Si les résultats ci-dessus se focalisent sur les spécificités du modèle non local on s'intéresse aussi dans une autre partie à la convergence de la dynamique dans le cas d'une limite singulière vers des échanges localisés. On considère des termes intégraux qui tendent vers des masses de Dirac. Une question naturelle est alors celle de la stabilité de la dynamique au regard d'échanges de la forme

$$\nu_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\nu\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),\ \mu_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\mu\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \tag{4}$$

où μ et ν sont des fonctions données à supports compacts. On obtient alors un résultat de dynamique uniforme que l'on peut résumer par la commutation de limite suivante. Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ la solution du système (2) avec fonctions d'échanges (4) partant d'une même donnée initiale. On montre alors un résultat de dynamique uniforme, qui peut se résumer par l'échange de limite suivant.

Théorème 2.
$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} u(t, x+ct) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty} u(t, x+ct). \tag{5}$$

Ce résultat s'obtient en montrant la convergence des solutions du système (2) vers celles du système avec conditions de bords quand ε tend vers 0, et repose sur un calcul non trivial de solutions fondamentales. Cette convergence est globale en espace et locale en temps et s'obtient via un argument de théorie géométrique des équations paraboliques.

Solutions entières pour des équations bistables inhomogènes

En milieu homogène, c'est-à-dire $\mathbb{R}^N$ ou un cylindre avec des conditions aux bords de type Neumann, l'existence d'ondes progressives planes pour des équations de réaction-diffusion de type bistable est connue depuis les travaux fondateurs de Fife et McLeod en 1977. En particulier il est bien connu que, à tout terme de réaction f de type bistable, il existe un unique couple (c, φ) solution de

$$\begin{cases} c\varphi' + \varphi'' + f(\varphi) = 0 \\ \varphi(-\infty) = 1, \ \varphi(+\infty) = 0, \ \varphi(0) = \theta. \end{cases} \tag{6}$$

La fonction $\varphi(x - ct)$ est alors l'onde progressive associée au problème de réaction-diffusion.

Quand l'espace sous-jacent présente des hétérogénéités les solutions de type ondes planes n'existent plus, mais peut être remplacée par la notion de front de transition généralisé, introduite entre autres par Berestycki et Hamel dans les années 2000. Le problème spécifique de fronts de transition pour des équations bistables dans des domaines de type cylindrique à sections variables a été étudié par Berestycki, Bouhours et Chapuisat récemment. Ils considèrent le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(u), & t \in \mathbb{R}, \ x \in \Omega, \\ \partial_\nu u(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

où Ω est un domaine infini dans la direction x_1, c'est-à-dire

$$\Omega = \left\{(x_1, x'), x_1 \in \mathbb{R}, x' \in \omega(x_1) \subset \mathbb{R}^{N-1}\right\}. \tag{8}$$

De plus, l'étude était faite dans le cas où le domaine est strictement cylindrique dans un demi-espace, soit

$$\Omega \cap \left\{x \in \mathbb{R}^N, x_1 < 0\right\} = \mathbb{R}^- \times \omega, \omega \subset \mathbb{R}^{N-1}. \tag{9}$$

Pour ce type de domaines les auteurs obtiennent de nombreuses propriétés concernant la propagation d'une onde bistable : propagation partielle, propagation complète, phénomènes de blocage, dépendants de la géométrie du domaine. Mais l'ensemble de ces résultats est conditionné à l'existence et l'unicité d'une solution entière : si (c, φ) est l'unique solution du problème (6), ils montrent qu'il existe une unique solution entière u solution de (7) telle que

$$|u(t,x) - \varphi(x_1 - ct)| \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformly in } \overline{\Omega}.$$

L'hypothèse (9) est capitale dans le schéma de preuve, et non robuste vis-à-vis de la topologie du domaine. Il est alors naturel de s'intéresser à des domaines qui convergent vers un cylindre dans une direction au lieu de domaines égaux à de tels cylindres dans un demi-espace. Ce problème constitue la deuxième partie de ma thèse, montrer l'existence de solutions entières pour des domaines satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Omega = \{(x_1, x'), \ x_1 \in \mathbb{R}, \ x' \in \omega(x_1)\}, \\ \omega(x_1) \underset{x_1 \to -\infty}{\longrightarrow} \omega^\infty \subset \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{10}$$

où Ω^∞ est la section limite, bornée, non-vide. On montre alors le théorème suivant sous des hypothèses supplémentaires sur le domaine et sa convergence.

Théorème 3. *Il existe une fonction $u(t, x_1, x')$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x') \in \Omega$ telle que*

$$\sup \{u(t, x_1, x') - \varphi(x_1 - ct)\} \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

où (c, φ) est l'unique onde bistable satisfaisant (6).

Il est démontré via un résultat de stabilité de l'onde bistable vis-à-vis de la perturbation induite par le domaine.

Il était naturel de regarder en première approche le problème unidimensionnel suivant :

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = f(u) (1 + g(x)), \ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

où g est une perturbation bornée qui tend vers 0 quand $x \to -\infty$. L'existence de fronts de transition pour des non-linéarités similaires a fait l'objet de nombreux travaux récents. Cependant l'approche considérée durant cette thèse, la stabilité en temps long de l'onde, est sensiblement différente des approches usuelles et permet une plus grande variété d'hétérogénéités dans une direction. On montre sous la condition

$$g > -\frac{\rho_1}{\|f'\|_\infty}$$

où ρ_1 est le trou spectral de l'opérateur linéarisé associé à l'onde (6) un théorème similaire au théorème 3 ci-dessus. On complète ainsi un résultat de Zlatoš sur les fronts hétérogènes.

Projets de recherche associés à mes travaux de thèse

Modèle champs-route avec échanges non-locaux

Introduire un terme de réaction sur la route : persistance des différences ? De nombreuses propriétés qualitatives ont été étudiées pour le modèle initial champs-route par Berestycki, Roquejoffre et Rossi en 2014. Il pourrait être intéressant de voir comment ces propriétés s'étendent au modèle non-local. En particulier, en incluant un terme de réaction suffisamment fort sur la route, on peut s'attendre à retrouver une vitesse d'invasion maximisée pour des échanges localisés. L'intuition générale est issue de travaux de Liang, Lin et Matano dans un cadre homogène unidimensionnel. Il serait intéressant de vérifier cette propriété heuristique, et montrer l'existence d'un seuil critique de réaction.

Transition entre propagation usuelle et accélérée pour des échanges étalés Dans ma thèse je montre l'existence d'un seuil dans la limite d'échanges étalés pour que la route influence la vitesse de propagation asymptotique de manière uniforme. De fait, si D est suffisamment grand, même dans le cas de termes d'échanges évanescents, il existe une vitesse d'invasion asymptotique dans la direction de la route qui sera uniformément supérieure à la vitesse usuelle c_{KPP}. Cependant, si les termes d'échanges sont proche de zéro en norme L^∞ il est raisonnable d'avoir pendant un temps long une propagation usuelle dans toutes les directions. Une question naturelle est alors d'étudier la transition entre une dynamique usuelle et une dynamique accélérée dans cette asymptotique.

Ondes de transition généralisées pour des équations bistables hétérogènes

Solutions entières unidimensionnelles Dans le cadre du modèle unidimensionnel (11) on montre l'existence d'une solution entière avec propriétés asymptotiques en $t = -\infty$. Il serait intéressant de relier ce type de solution avec les approches de type front de propagation développées par Berestycki et Hamel et utilisées dans un cadre proche par Zlatos entre autres. De plus, dans le cas d'une perturbation localisée avec des termes de réaction limites différents en $+\infty$ et $-\infty$, cela conduirait à l'existence d'un front connectant deux ondes différentes en $t = \pm\infty$. La question de cette transition pourrait alors être étudiée et approfondie.

Taux de convergence limite pour le domaine Le schéma de preuve utilisé dans ma thèse suggère l'idée qu'une convergence trop lente pourrait empêcher l'existence de solution entière dans le type de domaines considérés. Une question naturelle est alors de déterminer le taux de convergence limite pour l'existence d'un front convergeant vers l'onde bistable en $t = -\infty$, et quels types de phénomènes peut-on obtenir au-delà.

Retard et avance dû à la variation de la largeur de la section Dans le cas d'un domaine passant d'un cylindre donné à un cylindre plus fin, il est raisonnable de s'attendre à obtenir un front passant d'une onde à un translaté de la même onde. Cette translation se traduit par un retard ou une avance dans la propagation induit par la géométrie du domaine, et reste une question ouverte intéressante, à rapprocher des questions de perturbations localisées évoquées ci-dessus.

1.2 Travaux de post doctorat

Cette section comprend les résultats obtenus et projets initiés depuis ma soutenance, à l'Université du Minnesota. Le fil conducteur de ces travaux est l'étude de la dynamique en temps long d'équations paraboliques non linéaires.

Quasiconvergence pour des équation paraboliques semilinéaires unidimensionnelle

Ce projet est en collaboration avec Peter Poláčik. On considère l'équation parabolique suivante

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u + f(u) & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{12}$$

où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et u_0 est bornée. En supposant que $u(t,.)$ est uniformément bornée, alors $u(t,.)$ solution au sens classique de (12) est définie pour tout $t \geq 0$. C'est le cas par exemple si u_0 est entre deux zéros de f. Par régularité parabolique, l'ensemble des profils limites

$$\omega(u) := \left\{ \varphi \in C^1(\mathbb{R}),\ u(t_n,.) \to \varphi \text{ au sens } L^\infty_{loc}(\mathbb{R}),\ \text{pour une suite } t_n \to \infty \right\} \tag{13}$$

est non vide et connexe. Une question naturelle est alors d'essayer de déterminer quels sont les profils limites. Si l'ensemble $\omega(u)$ est réduit à un singleton, la solution est alors convergente et l'unique profil limite est une solution stationnaire de (12). Si la convergence de telles solutions est connue dans de nombreuses situations, en domaine borné par exemple, ou lorsque u_0 est de type front avec une non linéarité f non dégénérée (de type bistable ou KPP par exemple), ce n'est pas le comportement général pour ce type d'équation. Même dans le cas linéaire $f \equiv 0$, des exemples de solutions oscillantes sont connus depuis les années 90. Néanmoins, on peut raisonnablement espérer que l'ensemble des profils limites $\varphi \in \omega(u)$ soient solutions stationnaires de l'équation initiale. On dira alors que la solution u est quasiconvergente.

Une méthode usuelle pour obtenir la quasiconvergence de solutions d'équations non linéaires est l'utilisation de fonctionnelles de Lyapunov adaptées au problème. Néanmoins, cela nécessite en général d'avoir des solutions bornées pour certaines normes intégrales, ce qui exclut des résultats généraux sur des fonctions bornées. Par aileurs, même dans le cas de données initiales localisées, Poláčik a montré récemment qu'il était possible de construire des solutions non quasiconvergentes si $u_0(\pm\infty)$ est un zéro instable de f. L'objectif de ce projet est de montrer que, en un sens, cette condition est la seule qui permettrait d'obtenir des solutions non quasiconvergentes.

Un cadre général est de considérer l'espace fonctionnel

$$\mathcal{M} = \left\{\varphi \in C^1(\mathbb{R}),\ \varphi(-\infty) \text{ et } \varphi(+\infty) \text{ existent}\right\}.$$

Du fait de la régularité parabolique, $\mathcal{M}$ est stable pour (12) : si $u_0 \in \mathcal{M}$, alors $u(\cdot,t) \in \mathcal{M}$ pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, il est facile de construire des contre exemples si $u_0 \notin \mathcal{M}$. Notre premier résultat est alors le suivant.

Théorème 4. *Supposons que $u_0 \in \mathcal{M}$ et $u_0(-\infty) \neq u_0(+\infty)$. Si la solution $u(\cdot,t)$ de (12) est bornée, alors elle est quasiconvergente : $\omega(u)$ ne contient que des profils stationnaires.*

La preuve repose sur des arguments de type réflexion de la solution, nombre de zéros, et intersection dans le plan de phase. Elle permet d'obtenir une description assez précise des profils limites : aucun ne peut être un profil périodique non constant, et à moins que la solution $u(\cdot,t)$ ne soit asymptotiquement monotone sur tout compact, la solution est convergente.

Le cas $u_0(-\infty) = u_0(+\infty)$ présente des difficultés supplémentaires. Si on suppose que cette limite n'est pas un zéro instable de f (cas dans lequel il existe un contre exemple), on conjecture que la solution devrait être quasiconvergente. Dans un premier temps, on montre ce résultat dans le cas où aucun zéro de f n'est dégénéré.

Projet de recherche : solutions entières unidimensionnelles pour des équations paraboliques semilinéaires La deuxième partie de nos travaux sur la quasiconvergence de solutions de (12) nous a conduit à faire une étude détaillée des comportements en temps longs, vers $t \sim \pm\infty$, des solutions entières de telles équations. Bien sûr, une étude systématique des solutions entières dans un cadre général est illusoire en l'état actuel des connaissances. Néanmoins, il pourrait être possible de synthétiser et utiliser ces résultats dans un cadre générique pour obtenir une première approche de classification des solutions entières d'équations paraboliques semilinéaires.

Solutions périodiques pour des équations d'advection-diffusion

Ce projet est en collaboration avec Arnd Scheel. L'étude de la formation de motifs pour des équations de type Swift-Hohenberg ou Cahn-Hilliard soulève la question des liens entre nombre d'onde sélectionné par le système et déphasage induit par la création du motif. Dans une récente étude, Goh et al.montrent que les relations liant le nombre d'onde et le déphasage peuvent en première approximation se modéliser par l'équation d'advection-diffusion avec condition au bord non-linéaire suivante

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u - c\partial_x u & x > 0, t \geq 0 \\ \partial_x u = K(u) & x = 0, t \geq 0 \end{cases} \tag{14}$$

où u représente le déphasage et le nombre d'onde K est une fonction périodique.

Notre objectif est de décrire la dynamique induite par une telle condition de Neumann. En écrivant

$$K(u) = 1 + \alpha\cos(u) \tag{15}$$

deux types de dynamiques se détachent.

- $|\alpha| < 1$: existence d'une solution périodique à translation près : $u(t,x)$ solution de (14-15) satisfait $u(t+T,x) = u(t,x) - 2\pi$. Cette solution serait alors un attracteur de la dynamique.
- $|\alpha| \geq 1$: on suppose l'existence de solutions entières uniformément bornées connectant deux zéros de K, empêchant alors l'existence de solutions de type périodique.